Nom :	**DM 02**	TMATHS8 — *Oct. 2021*
Prénom :		*Devoir nº 03* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Exercice 1 : Une fonction ...

Soit f la fonction définie pour tout réel de $I =]4;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 24x + 2}{(x-3)^2}$$

On se propose d'étudier le sens de variation de la fonction f. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 68$

1 Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. Donner son tableau de variation.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. $g'(x) = 3x^2 - 12x + 13$. $\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 3 \times 13 = 12(12-13) = -12$
$3x^2 - 12x + 13$ est un trinôme du second degré ayant un discriminant négatif ; il a donc le signe de $a = 3$ sur $\mathbb{R}$.
Vers l'infini,une fonction polynôme a la limite de son monôme de plus haut degré.
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$
On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2 **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur [-2 ;-1].
Dressons le tableau de variation de g sur [-2 ;-1].

x	-2		-1
$g'(x)$		$+$	
Variations de g	-8	$\nearrow$	30

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [-2;-1]$.
- ✍ g est strictement croissante sur l' intervalle $I = [-2;-1]$.
- ✍ $g(-2) = -8$ et $g(-1) = 30$
- ✍ g réalise donc une bijection de $[-2;-1]$ sur $[-8;30]$
  0 est compris entre $g(-2)$ et $g(-1)$, en effet $g(-2) < 0$ et $g(-1) > 0$
  donc l'équation $g(x) = 0$ a une racine unique α dans $[-2;-1]$.

b. Endéduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
Variations de g		↗	0	↗	
Signe de $g(x)$		-	0	+	

3 **a.** Ecrire l'algorithme de DICHOTOMIE qui permet d'afficher, une fois entré un réel H positif un encadrement de α d'amplitude inférieur à H.

Saisir la valeur de H
$a \leftarrow -2$
$b \leftarrow -1$
tant que $abs(b-a) > H$ **faire**
  $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  si $f(a) \times f(m) < 0$ **alors**
    $b \leftarrow m$
  sinon
    $a \leftarrow m$
  fin
fin
Afficher a et b

b. Faire fonctionner cet algorithme pour donner un encadrement de α d'amplitude inférieur à 10^{-6}. Avec Python : Deux programmes sous Python :

```
# Programme dichotomie

def f(x):
        y= x**3-6*x**2+13*x+50
return y

def dichotomie(a,b,n):
        for i in range(n):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
                b=c
        else:
                a=c
        return a,b

def dichobis(a,b,prec):
while b-a> prec:
c=(a+b)/2
if f(a)*f(c)<0:
b=c
else:
a=c
return a,b
```

PARTIE B :

1. **a.** Vérifier que pour tout réel x de I , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^3}$ où g est la fonction définie dans la partie A).

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f (attention au signe de $(x-2)^3$). Donner son tableau de variation.

2. Soit la droite Δ d'équation $y = x + 4$ Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

3. Tracer $\mathcal{C}_f$, Δ dans un repère orthonormal d'unité le cm.