Nom : .... Prénom :	**DS 03** CASE DES MATHS	TMATHS8 Nov. 2021 Devoir n° 03 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 9 points

9 pts

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. Pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{2n-5}{n^2+3}$
2. Pour tout entier naturel $n, v_n = -2n+5n^2+(-0,3)^n$
3. Pour tout entier naturel $n, w_n = \dfrac{\sin(n)-5}{n+1}$ (un encadrement sera nécessaire)
4. Pour tout entier naturel $n, y_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n}$

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. Pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{2n-5}{n^2+3}$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n-5}{n^2+3} \\ &= \frac{n\left(2-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2-\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

2. Pour tout entier naturel $n, v_n = -2n+5n^2+(-0,3)^n$

Calculons tout d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n+5n^2)$:

$(-2n+5n^2) = n^2\left(-\dfrac{2}{n}+5\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2}{n}+5 = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit } \lim_{n\to+\infty} (-2n+5n^2) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} (-2n+5n^2) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (-0,3)^n = 0 \quad \text{car } -1 < -0,3 < 1 \end{array}\right\} \text{ Par somme } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

3 Pour tout entier naturel $n, w_n = \dfrac{\sin(n)-5}{n+4}$ (un encadrement sera nécessaire)

On écrit $w_n = \dfrac{\sin(n)-5}{n+4} = \dfrac{\sin(n)}{n\left(1+\dfrac{4}{n}\right)} - \dfrac{5}{n+4} = \dfrac{\sin(n)}{n} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{4}{n}} - \dfrac{5}{n+4}$

Ayayant pour tout entier n : $-1 \leq \sin n \leq 1$,
en divisant par $n>0$ dès que $n \geq 1$, on obtient :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n} \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \end{array}\right.$ le théorème des gendarmes s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{\sin(n)}{n} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{\sin(n)}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = 1 \end{array}\right\} \text{ par produit } \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \times \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = 0 \quad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \times \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{n+4} = 0 \end{array}\right\} \text{ par somme } \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0}$$

4 Pour tout entier naturel $n, y_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n}$

On a $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \left(\dfrac{9}{5}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{5}\right)^n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n$

Comme $\dfrac{6}{5} > 1$, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n = +\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty}$$

Exercice 2 — 17,5 points

17.5 pts La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1 Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

Pour $n=0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4} \times 0 + 1 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{7}{4}$.

Pour $n=1$, $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{7}{4} \text{ et } u_2 = \frac{41}{16}.}$$

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

1 **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :

= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

La suite (u_n) semble croissante.

2 **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** Soit k un entier fixé.

  On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie, c'est-à-dire : $k \leqslant u_k \leqslant k+1$ (hypothèse de récurrence).

  $$k \leqslant u_k \leqslant k+1 \iff \frac{3}{4}k \leqslant \frac{3}{4}u_k \leqslant \frac{3}{4}(k+1)$$
  $$\iff \frac{3}{4}k + \frac{1}{4}k \leqslant \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4}k \leqslant \frac{3}{4}(k+1) + \frac{1}{4}k$$
  $$\iff k \leqslant \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4}k \leqslant k + \frac{3}{4}$$
  $$\iff k+1 \leqslant \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4}k + 1 \leqslant k + \frac{3}{4} + 1 \iff k+1 \leqslant u_{k+1} \leqslant k + \frac{7}{4}$$

  donc $k+1 \leqslant u_{k+1} \leqslant k+2$.

  Ok a démontré que la propriété était vraie au rang $k+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc
  $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

3 On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

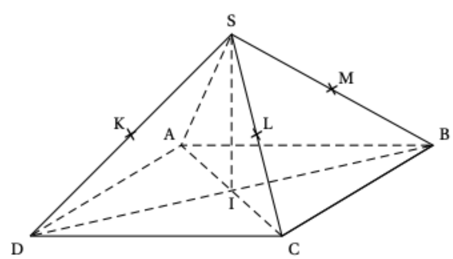
b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 3 — 10,5 points

10.5 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 5 qui sera ramassé 30 minutes après le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1 Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

On procède par élimination.

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**

Réponse c.

2 La droite (KL) et le plan (SAB) sont :

a. sécants **b.** parallèles **c.** ni sécants, ni parallèles **d.** coplanaires

Les points K et L les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC].

- D'après le théorème des milieux $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
- et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ car $ABCD$ est un carré.
- donc $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Ainsi $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les droites (AB) et (KL) sont parallèles.
On déduit La droite (KL) est parallèle au plan (SAB) car elle est parallèle à (AB) une droite du plan (SAB).

Réponse b.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I}\,;\,\overrightarrow{\text{IC}},\,\overrightarrow{\text{IB}},\,\overrightarrow{\text{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,\text{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\text{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,\text{C}(1\,;\,0\,;\,0);\text{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,\text{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

3 Les coordonnées du point M sont :

a. $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$

On a $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où M le milieu de [BS] $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Réponse a.

4 Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Réponse b.

5 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{AS}}\begin{pmatrix}x_S-x_A\\y_S-y_A\\z_S-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Réponse b.

6 Les coordonnées du point T tel que $\overrightarrow{\text{AT}} = 3\overrightarrow{\text{BC}}$ sont :

a. $(2\,;\,-3\,;\,0)$ **b.** $(3\,;\,-3\,;\,0)$ **c.** $(4\,;\,-3\,;\,0)$ **d.** $(0\,;\,2\,;\,-3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AT}} = 3\overrightarrow{\text{BC}} \quad &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0-0\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}x+1=3\\ y=-3\\ z=0\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-3\\ z=0\end{cases}\end{aligned}$$

Réponse a.

7 Les points I, L, M et Q sont coplanaires si :

a. Q(3 ; 1 ; 2) **b.** Q(3 ; −1 ; 2) **c.** Q(2 ; −1 ; 2) **d.** Q(−3 ; 1 ; −2)

On a $I\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On teste avec le deuxième point : Q(3 ; −1 ; 2)

$$\begin{aligned}
\text{I, L, M et Q sont coplanaires} &\iff \overrightarrow{IQ} = x\overrightarrow{IM} + y\overrightarrow{IL}\\
&\iff \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}\frac{1}{2}y = 3\\ \frac{1}{2}x = -1\\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}y = 6\\ x = -2\\ \frac{1}{2}\times(-2) + \frac{1}{2}\times(6) = -1 + 3 = 2\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, si Q(3 ; −1 ; 2) alors $\overrightarrow{IQ} = -2\overrightarrow{IM} + 6\overrightarrow{IL}$

Réponse b.

Exercice 4 — 10 points

6.5 pts On considère la fonction f définie sur $[-5;10]$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1 Étudier les variations de f sur $[-5;10]$ et dresser son tableau de variation sur $[-5;10]$.

f est dérivable sur $[-5;10]$ comme produit de deux fonctions dérivables. $f = uv + 1$ d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans D_f :

$\begin{cases}u(x) &= x\\ v(x) &= \mathrm{e}^{-x}\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases}u'(x) &= 1\\ v'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

Attention ! $(\mathrm{e}^{u})' = u'\mathrm{e}^{u}$, ainsi $(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1\times\mathrm{e}^{-x} + (-\mathrm{e}^{-x})\times x\\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $[-5;10]$:

x	-5		1		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$1-5\mathrm{e}^{5}$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	$1+10\mathrm{e}^{-10}$

2 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-5;10]$.

- Sur $[-5;1]$; d'après le théorème de la bijection :
  - ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [-5;1]$.

✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $I = [-5;1]$.

✍ $f(-5) = 1 - 5e^5$ et $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$

✍ f réalise donc une bijection de $[-5;1]$ sur $\left[1 - 5e^5; 1 + \frac{1}{e}\right]$
0 est compris entre $f(-5)$ et $f(1)$, en effet $f(-5) < 0$ et $f(1) > 0$
donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[-5;1]$.

- Sur $[1;10]$; la fonction f est strictement décroissante, ainsi si $1 \leq x \leq 10$ alors $f(x) \geq f(10)$ soit $f(x) \geq 1 + 10e^{-10} > 0$.
Ainsi l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[1;10]$.
On peut remarquer que sur cet intervalle, $x > 0$, $e^{-x} > 0$ donc $xe^{-x} > 0$, puis $xe^{-x} + 1 > 1 > 0$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-5;10]$.

3 Donner un encadrement de 10^{-2} près.
A l'aide d'une calculatrice, on obtient $f(-0,57) \approx -0,008$ et $f(-0,56) \approx 0,0196$

$$\boxed{-0,57 < \alpha < -0,56}$$

✄ ✄

Nom :	**DS 03** CASE DES MATHS	TMATHS8 *Nov. 2021*
Prénom :		*Devoir n° 03* .../...

A rendre au bout de 30 minutes.

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7
Réponse	c	b	a	b	b	a	b