Lycée l' Oiselet

Lundi 12 Février 2024

BACCALAURÉAT BLANC 2024 DE MATHÉMATIQUES

– SPÉCIALITÉ - MATHS –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sujet 1

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- *Le nom de votre professeur de Spécialité.*

Exercice 1

5 points

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.
On définit les événements suivants :
R : « la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » ;
J : « la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus » ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
   En déduire que $x = \dfrac{1}{6}$.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot. On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On se justifiera et on donnera les paramètres de cette loi.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.
3. Déterminer $E(X)$. Interpréter cette valeur.
4. On considère qu'il y a n bouteilles de jus d'orange et non plus 500.
   Déterminer le plus petit entier n tel que

$$P(X \geq 1) \geq 0,9999$$

   On justifiera la réponse.

Exercice 2

5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1 **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.

2 **a.** Calculer la limite de la fonction f en 0.

b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

3 Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4 **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution.

b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4{,}3\,;\,4{,}4[$.

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

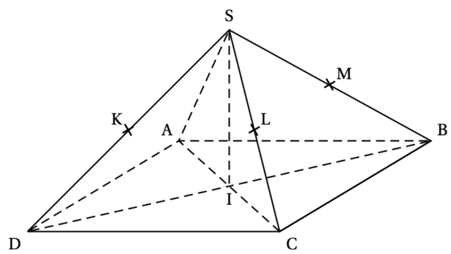
5 On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def  seuil(pas) :
     x=4.3
     while x*log (x) - x - 2 < 0:
       x=x+pas
     return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1 Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\quad ;\quad \mathrm{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\quad ;\quad \mathrm{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\quad ;\quad \mathrm{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\quad ;\quad \mathrm{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\quad ;\quad \mathrm{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2 Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

3 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4 Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-1-t\\y&=&t\\z&=&-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-1+2t\\y&=&0\\z&=&1+2t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\y&=&0\\z&=&1+t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-1-t\\y&=&1+t\\z&=&1-t\end{array}\right.$ $(t\in\mathbb{R})$

5 P est le point tel que $\overrightarrow{IP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{IA}$

Une représentation paramétrique de la droite (LP) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{1}{2}+5k\\y&=&0\\z&=&\frac{1}{2}+2k\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{3}{4}-5k\\y&=&0\\z&=&-2k\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{1}{2}+10k\\y&=&1\\z&=&\frac{1}{2}+4k\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{1}{2}+5k\\y&=&0\\z&=&\frac{1}{2}+k\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{R})$

Exercice 4

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1 Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$

2
- **a.** Calculer u_1 et u_2.
- **b.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

3
- **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.
- **b.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- **c.** Démontrer que la suite (u_n) converge.

4 Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
- **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
- **b.** Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
- **d.** Déterminer la limite de la suite (u_n).

5 On considère la fonction en langage python suivante :

```
def limite(p) :
    u=0.5
    n=0
    while u<1-10**(-p) :
        u=3*u/(1+2*u)
        n=n+1
    return n
```

- **a.** Qu'obtient-on si l'on saisit dans la console limite(2) ?
- **b.** Est-on certain que la boucle while s'arrêtera quelle que soit la valeur de l'entier naturel p entrée en argument ?