Nom : .... *Prénom :*	**DS 01** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Sept. 2023* *Devoir nº 02* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 2CM — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 20 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1 pt **1** La quantité $\dfrac{(e^{2x})^2}{e^{3x+1}\times e^{-x-1}}$ peut se simplifier en :

a. e^{2x} **b.** e^{4x+2} **c.** 1 **d.** 0

1 pt **2** On peut remplacer $2+\dfrac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+1}$ par :

a. $\dfrac{5-3e^x}{1-e^x}$ **b.** $\dfrac{5+3e^x}{1-e^x}$ **c.** $\dfrac{5+3e^x}{1+e^x}$ **d.** $\dfrac{5-3e^x}{1+e^x}$

1 pt **3** On peut écrire $(3x-1)e^x<0 \iff 3x-1<0$ car :

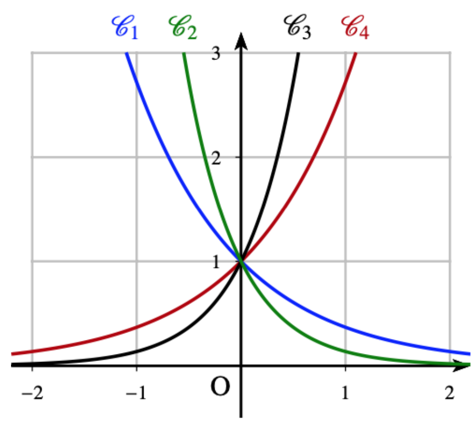
a. La fonction exp est monotone
b. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
c. La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$
d. La fonction exp est non nulle sur $\mathbb{R}$

1 pt **4**

On a représenté quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x, g(x)=e^{-x}, h(x)=e^{2x}, k(x)=e^{-2x}$$

Laquelle de ces courbes représente la fonction k ?



a. $\mathscr{C}_1$ **b.** $\mathscr{C}_2$ **c.** $\mathscr{C}_3$ **d.** $\mathscr{C}_4$

1 pt **5** Soit f la fonction de courbe $\mathscr{C}_f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$.
La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f en $x=1$ a pour équation :

a. $y=ex+e$ **b.** $y=2ex-e$ **c.** $y=2ex+e$ **d.** $y=ex$

Exercice 2 : Simplifions !

5,75 points

5.75 pts

1. Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^{-3}} \qquad B = \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \qquad C = \frac{\left(e^{-2x}\right)^3 \times e^{4x}}{e^{-2x}}$$

2. Montrer les égalités suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   a. $2e^{2x} + 6e^x - 8 = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$
   b. $\dfrac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$

Exercice 3 : Equations et Inéquations

5,5 points

5.5 pts Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x-3} = \mathrm{e}^2$
2. $(5x-7)\mathrm{e}^{3x-1} = 0$
3. $\mathrm{e}^{-x} - 1 \leq 0.$
4. $(6-5x)\mathrm{e}^x > 0.$

Exercice 4

5,5 points

5.5 pts Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = 7x^2 + 5x + 1 - 3e^x$
2. $g(x) = (3x+5)e^x$
3. $h(x) = \dfrac{e^x + 1}{3e^x + 2}$

Exercice 5 : Variations

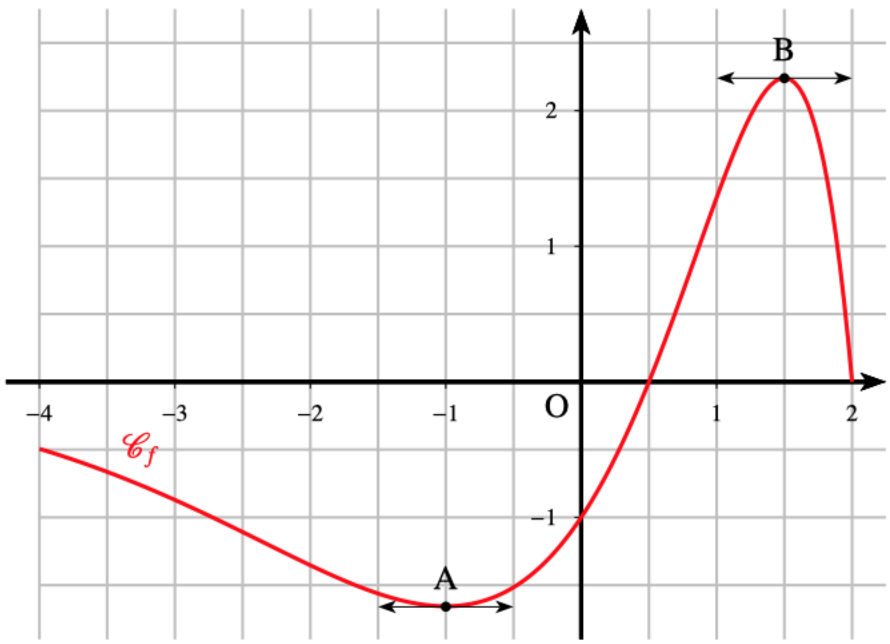
4,25 points

4.25 pts Soit la fonction f définie sur $[0;5]$ par : $f(x) = (4x-1)e^{-x}$

1. Déterminer et factoriser $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$ en précisant les valeurs exactes des bornes et du maximum de f.

Exercice 6 Représentation graphique et fonction — 8,5 points

8.5 pts
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;2]$ dont on donne la courbe C_f ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$ et $f'(x) \leq 0$. Justifier.
2. On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = (-x^2 + 2,5x - 1)e^x$.
   - **a.** Déterminer la fonction dérivée f' .
   - **b.** Étudier le signe de la fonction f' sur [-4; 2] puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur [-4; 2].
   - **c.** Déterminer l'équation de la tangente à C_f en $\frac{1}{2}$.

Exercice 7 — 3 points

3 pts On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ch : $x \mapsto \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par sh : $x \mapsto \text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1. Montrez que $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ puis que $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$.
2. Montrez que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

Exercice 8 Une modélisation — 5,25 points

5.25 pts On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-3x}$ avec a et b deux réels.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Trouver a et b sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
3. Etudier les variations de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0.

Exercice 9 Pour occuper celles et ceux qui vont trop vite ! 3 points

4 pts Montrer que pour tous réels a et b on a :

$$\text{Si } a < b \quad \text{alors} \quad e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$$

Nom :	**DS 01** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Sept. 2023*
Prénom :		*Devoir n° 02* ..../...

Feuille de réponses de l'exercice 1 :

✄ ✄

A rendre au bout de 20 minutes.

Nom , prénom :

Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse					