Nom : . . . . Prénom :	DS 03 — CASE DES MATHS	TMATHS OISELET — Devoir n° 06	Nov. 2023 — . . . / . . .

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 2CM — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 20 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1 pt **1** La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égal à :

a. $3^n(3^n+2)$ **b.** $3^n + 5^n$ **c.** 3^{n+1}

1 pt **2** Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$:

a. $u_1 = 5$ **b.** $u_2 = 200$ **c.** La suite (u_n) est croissante.

1 pt **3** Si la suite (u_n) est géométrique alors on peut avoir :

a. $u_n = (n+1)^2$ **b.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

1 pt **4** Si la suite (u_n) est arithmétique alors on peut avoir :

a. $u_n = n^2 + 3$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ **c.** $u_n = \dfrac{3}{4}n - 3$

1 pt **5** La limite quand $n \to +\infty$ de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1-4n}{n}$ est :

a. -1 **b.** -4 **c.** $+\infty$

Exercice 2 — 10 points

10 pts **On rédigera en détail, la détermination de chaque limite.**

1 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $u_n = 2n^2 + 3n + 5$.

2 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $v_n = \dfrac{n+2}{n^2+1}$.

3 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \left(-n^2 - n + 1\right)$.

4 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$

5 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{n} + 2\right)$

Exercice 3 — 3 points

3 pts

1 Construire la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x \text{ si } x \in [-2;0[\\ x \text{ si } x \in [0;2] \end{cases}$$

2 La fonction f est-elle continue sur $[-2,2]$. Justifier.

Exercice 4 — 8 points

8 pts f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4;4]$ par $f(x) = x^3 - 27x + 4$

1 Montrer que pour tout réel x de $[-4;4]$, on a $f'(x) = 3(x-3)(x+3)$.

2 Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

3 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[-4;4]$.

4 Avec la calculatrice donner un arrondi au centième de α.

5 En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 5 Limite et comparaison — 3 points

3 pts Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{e^n}$

1 Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 - e^{-n} \leq u_n \leq 1 + e^{-n}$

2 En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 — 12 points

12 pts On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1 Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2 **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3 Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

4 En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 7 Bonus — *3 points*

3 pts Trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) = x + 2$ si $x < 0$
- f est un polynôme du second degré pour x entre 0 et 1.
- f est affine de pente négative pour $x > 1$.

Nom : .... *Prénom :*	**DS 03** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Devoir n° 06* *Nov. 2023* .../...

Feuille de réponses de l'exercice 1 :

✄ ✄

A rendre au bout de 20 minutes.

Nom , prénom :

Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse					