Nom :	DS 04	TMATHS OISELET — Devoir n° 08	Déc. 2023
Prénom :			.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 5 points

5 pts

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ 11]$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

1 Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ 11]$ et construire son tableau de variations.
On étudie le signe de la dérivée sur $[0;+\infty[$ qui vaut en reportant $a = b = 1$ dans $\left(-\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}b + a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \tfrac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

- Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$
- $\frac{1}{2} > 0$

Ainsi la dérivée a le signe de $1 - x$. On déduit le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$:

x	0		1		11
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	1	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$12\mathrm{e}^{-\frac{11}{2}}$

2 Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution α sur l'intervalle$[0\ ;\ 11]$.
D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $[1;11]$.
- ✍ f est strictement décroissante sur l' intervalle $[1;11]$.
- ✍ $f(1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 1,2$ et $f(11) = 12\mathrm{e}^{-\frac{11}{2}} \approx 0,05$
- ✍ f réalise donc une bijection de $[1;11]$ sur $\left[12\mathrm{e}^{-\frac{11}{2}};.2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right]$
  $0,5$ est compris entre $f(1)$ et $f(11)$, en effet $f(1) > 0,5$ et $f(.113) < 0,5$
  donc l'équation $f(x) = 0,5$ a une racine unique α dans $[1;11]$.

3 Donner l'arrondi de α à l'unité.
Avec une calculatrice on obtient $f(4) \approx 0,7$ et $f(5) \approx 0,49$
ainsi $f(5) < f(\alpha) < f(4)$
ce qui fournit $4 < \alpha < 5$ car f est strictement décroissante sur $[4;5]$.

$\boxed{\text{l'arrondi de } \alpha \text{ à l'unité est 5.}}$

Exercice 2 Vrai-Faux — 6 points

6 pts

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-3\,;-2\,;-1\,), B(-2\,;0\,;1\,)$ et $C(7\,;3\,;6\,)$

On donne des représentations paramétriques des droites d : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t+1 \\ y & = & 2t-1 \\ z & = & 2t+1 \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$ et d' : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t'+1 \\ y & = & t'-3 \\ z & = & t' \end{array}\right.$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1 Les droites d et (AB) sont confondues.

(AB) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2+3 \\ 0+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Donc (AB) et d sont parallèles.

On regarde si $A \in d \iff \left\{\begin{array}{l} -3 = t+1 \\ -2 = 2t-1 \\ -1 = 2t+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = -4 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ Donc A n'appartient pas à d, et les droites (AB) et d sont strictement parallèles.

$\boxed{\text{L'affirmation « Les droites } d \text{ et } (AB) \text{ sont confondues. »est fausse.}}$

2 Les droites d et (BC) sont sécantes.

(BC) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 7+2 \\ 0+2 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Par ailleurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ estun vecteur directeur de d.

Comme $\frac{9}{1} \neq \frac{3}{2}$ (BC) et d ne sont pas parallèles.
On détermine leur intersection :

- On cherche une représentation paramétrique de (BC) : $\left\{\begin{array}{l} x = 9s-2 \\ y = 3s \\ z = 5s+1 \end{array}\right.$
- $$M \in (BC) \cap d \iff \left\{\begin{array}{l} t+1 = 9s-2 \\ 2t-1 = 3s \\ 2t+1 = 5s+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 9s-t = 3 \\ 3s-2t = -1 \\ 5s-2t = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} s = \frac{7}{15} \\ t = \frac{6}{5} \\ 5s-2t = 0 \end{array}\right.$$

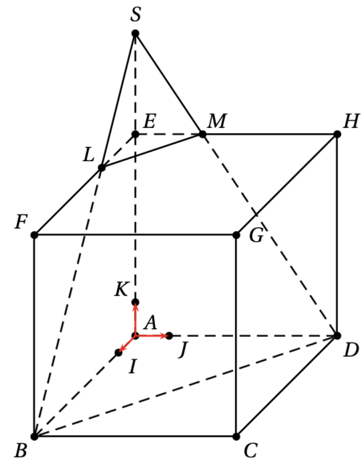
  Ce système est incompatible car $5 \times \frac{7}{15} - 2 \times \frac{6}{5} = -\frac{1}{15}$.
  Donc les droites (BC) et d ne sont pas sécantes ; elles sont donc non coplanaires.

$\boxed{\text{L'affirmation « Les droites } d \text{ et } (BC) \text{ sont sécantes. »est fausse.}}$

Exercice 3 — 11 points

11 pts

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

Partie A

Dans cette partie, on n'utilisera pas les coordonnées.

1 Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
Les droites (LM) et (BD) sont **coplanaires** (dans le plan (BDS)) et contenues respectivement dans les plans (EFH) et (ABD) qui sont **parallèles**, donc elles sont **parallèles**.
Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.

2 Démontrer que les droites (LM) et (FH) sont parallèles.

- Rédaction 1 : Le plan (FBDH) contenant les droites parallèles (FB) et (DH) (parallèles à une même troisième droite (CG)) coupe les plans (EFG) et (ABC) selon deux droites parallèles (FH) et (BD).
  Comme (LM)//(BD) alors (LM)//(FH)
- Rédaction 2 : D'après la question 1, (LM)//(BD), donc $\overrightarrow{LM} = k\overrightarrow{BD}(1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}\\ &= \overrightarrow{FH}(2)\end{aligned}$$

De (1) et (2) ,on déduit $\overrightarrow{LM} = k\overrightarrow{FH}$
Ce qui prouve que (LM) et (FH) sont parallèles car les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont colinéaires .

3 En déduire que dans le plan $(EFGH)$ le triangle ELM est isocèle.
Dans le triangle (EFH) , les points E, L, F et E, M, sont rangés dans le même ordre et les droites (LM) et (FH) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EL}{EF} = \frac{EM}{EH}$$

et puisque $EF = EH =$ côté du cube, alors $EL = EM$.

Donc le triangle ELM est isocèle.

Partie B

1 **a.** Donner sans justification les coordonnées des points A, B, C, D, E, G, H.

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};B\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix};C\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix};D\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix};E\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix};F\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix};G\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix};H\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$$

b. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et que les coordonnées du point M sont $(0\ ;2\ ;6\ )$.

- On pose $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix}x-6\\y\\z-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}0-6\\0-0\\6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{FL}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{FE} \iff \begin{pmatrix}x-6\\y\\z-6\end{pmatrix}=\tfrac{2}{3}\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x-6=-4\\y=0\\z-6=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=2\\y=0\\z=6\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } L\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}}$$

- Comme ELM est isocèle en E , $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$

On pose $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}0-0\\6-0\\6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{EM}=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{EH} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z-6\end{pmatrix}=\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x=0\\y=2\\z=6\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } M\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}}$$

2 **a.** Donner une représentation paramétrique de chacune des droites (BL) et (DM).

- $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}2-6\\0-0\\6-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$

$$X\begin{pmatrix}x\\x\\z\end{pmatrix}\in(BL) \iff \overrightarrow{BX}=t\overrightarrow{BL} \iff \begin{pmatrix}x-6\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x=6-4t\\y=0 & (t\in\mathbb{R})\\z=6t\end{cases}$$

- $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}0-0\\2-6\\6-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\6\end{pmatrix}$

$$X\begin{pmatrix}x\\x\\z\end{pmatrix}\in(DM) \iff \overrightarrow{DX}=s\overrightarrow{DM} \iff \begin{pmatrix}x\\y-6\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\-4\\6\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x=0\\y=6-4s & (s\in\mathbb{R})\\z=6s\end{cases}$$

une représentation paramétrique de (BL) est
$$\begin{cases}x=6-4t\\y=0 & (t\in\mathbb{R})\\z=6t\end{cases}$$

une représentation paramétrique de (DM) est
$$\begin{cases}x=0\\y=6-4s & (s\in\mathbb{R})\\z=6s\end{cases}$$

b. En déduire les coordonnées du point S .

$$S \in (BL) \cap (DM) \iff \begin{cases} 6-4t=0 \\ 0=6-4s \\ 6t=6s \end{cases}$$
$$\iff s = t = \tfrac{6}{4} = \tfrac{3}{2}$$

$$\boxed{S \text{ a pour coordonnées } \begin{cases} x=0 \\ y=6-4s=0 \\ z=6\times\tfrac{3}{2}=9 \end{cases} \quad S\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}}$$

Exercice 4 — 12 points

12 pts

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1 Calculer u_1.
$u_1 = f(u_0) = \dfrac{2+9}{4+3} = \dfrac{11}{7}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{11}{7}.}$$

2 Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;4]$.
La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;4]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{3(4+x)-1(2+3x)}{(4+x)^2} = \dfrac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \dfrac{10}{(4+x)^2}$
Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0\,;4]$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc croissante sur } [0\,;4].}$$

3 Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

Démonstration par récurrence : on note $\pi(n) : 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
Initialisation
On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$:
en effet $1 \leqslant \dfrac{11}{7} \leqslant 3 \leqslant 3$ l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité Soit k un entier fixé
Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0\,;4]$, on
$f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 3$,
$1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $k+1$.
Conclusion : $\pi(0)$ est vraie et $\pi(n)$ est héréditaire : d'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{pour tout naturel } n, \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.}$$

4 **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.

b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$

c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.
On en déduit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell+\ell-2 = 0$.
Or $\Delta = 1+4\times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :
$\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
Comme $\ell \in [1\ ;\ 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1 On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

$$\boxed{\text{On peut conjecturer que la suite } (v_n) \text{ est croissante et qu'elle a pour limite 1.}}$$

2 **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n).$$

$1 - v_{n+1} = 1 - \dfrac{2+3v_n}{4+v_n} = \dfrac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \dfrac{2-2v_n}{4+v_n} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\pi(n) : \quad 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Initialisation pour $n = 0$, $\ 1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$.

On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.
Donc $\pi(0)$ est vraie.

Hérédité Supposons qu'au rang $k \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_k \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

On a $1 - v_{k+1} = \dfrac{2}{4+v_k}(1 - v_k)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$1 - v_k \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

On multiplie par $\dfrac{2}{4+v_k} > 0$

$1 - v_{k+1} \leqslant \dfrac{2}{4+v_k} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Or $0 \leqslant 1 - v_k \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \iff v_n \geqslant 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \geqslant 0$; il suit que $4 + v_k \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \dfrac{1}{4+v_k} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On a donc $0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$, soit finalement :

$0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$: l'encadrement est vrai au rang $k+1$.

Conclusion $\pi(0)$ est vraie et $\pi(n)$ est héréditaire ; d'après le principe de récurrence :

quel que soit le naturel n, $\quad 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3 La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la la limite de $1 - v_n = 0$(théorème des gendarmes), donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

Annexe

À rendre avec la copie