| Nom : ........................ | **DS 05** | TMATHS OISELET | Janv. 2024 |
|---|---|---|---|
| Prénom : ........................ | CASE DES MATHS | Devoir n° 10 | .../... |

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.* ***Faites des phrases claires et précises.***
*Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.*

**Attention ! Le sujet est recto-verso.**

## Exercice 1 — 8 points

2 pts **1** Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$ ; $\ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln 8 = -\ln\left(2^3\right) = -3\ln 2$ ; $\ln(4\mathrm{e}) = \ln 4 + \ln \mathrm{e}) = 2\ln 2 + 1$ ;
$\ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2}\ln 8 = \frac{1}{2}\times 3\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$

2 pts **2** $\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$

✍ L'équation a un sens ssi

$$\begin{cases} 2x+1>0 \\ x-3>0 \\ x+5>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ x>3 \\ x>-50 \end{cases} \iff x>3$$

$$\boxed{\text{Le domaine de l'équation est } D = ]3;+\infty[}$$

✍ Sur $D$

$$\begin{aligned} \ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5) &\iff \ln(2x+1)(x-3)=\ln(x+5) \\ &\iff (2x+1)(x-3)=(x+5) \\ &\iff 2x^2-6x+x-3-x-5=0 \\ &\iff 2x^2-6x-8=0 \\ &\iff x^2-3x-4=0 \\ &\iff x=-1 \text{ ou } x=4 \end{aligned}$$

✍ $-1 \notin D$ donc n'est pas solution, et $4 \in D$ donc est solution.

$$\boxed{\mathcal{S}=\{4\}}$$

2 pts **3** Résoudre l'inéquation suivante en ayant soin de déterminer l'ensemble sur lequel votre calcul est valable. On visualisera l'ensemble solution sur une droite orientée.

$$\ln x + \ln(2x-3) \leq \ln 5$$

✍ L'inéquation a un sens ssi

$$\begin{cases} x>0 \\ 2x-3>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases} \iff x>\frac{3}{2}$$

$$\boxed{\text{Le domaine de l'inéquation est } D = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[}$$

✍ Sur $D$

$$\begin{aligned} \ln x+\ln(2x-3)\leq \ln 5 &\iff \ln x(2x-3)\leq \ln 5 \\ &\iff x(2x-3)\leq 5 \\ &\iff 2x^2-3x-5\leq 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2-4ac = 9+40 = 49$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{4} = -1$$

$2x^2-3x-5$ est un trinôme du second degré qui a pour racines $-1$ et $\frac{5}{2}$ ; il a donc le signe de $a=2$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $2x^2-3x-5$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

✍ $\mathcal{S} = \left[-1;\frac{5}{2}\right] \cap \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]}$$

2 pts **4** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ vérifiant : $1-\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,999$

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,999 &\iff \left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,001 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) < \ln(0,001) && \text{en appliquant ln strictement croissante sur } ]0;+\infty[ \\
&\iff n\ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln(0,001) && \text{car } \ln(a^n) = n\ln a \\
&\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} && \text{en divisant par } \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 24,01$

$$\boxed{\text{le plus petit entier naturel } n \text{ vérifiant : } 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,999 \text{ est } 25.}$$

## Exercice 2 — 8 points

8 pts Calculer les limites suivantes en vous justifiant soigneusement :

**1** $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+x+2}$ ; $a=-\infty$.

$$f(x)\frac{2x+3}{x^2+x+2} = \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(2+\tfrac{3}{x}\right) = 2 \\
\lim_{x\to-\infty} \left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{2}{x^2}\right) = 1
\end{aligned}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 2$$

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 2
\end{aligned}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

**2** $f(x)=\dfrac{\ln x+3x}{x^2}$ ; $a=+\infty$.

On écrit $f(x)=\dfrac{\ln x+3x}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{3}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0 \text{ Limite de référence}\end{array}\right\}\quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+3x}{x^2}=0$$

**3** $f(x)=\dfrac{3e^x-x^2+2}{x^2}$ ; $a=+\infty$.

On écrit $f(x)=\dfrac{3e^x-x^2+2}{x^2}=3\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}=3\dfrac{e^x}{x^2}-1+\dfrac{2}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}-1+\dfrac{2}{x^2}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)=+\infty \text{ Limite de référence}\end{array}\right\}\quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-x^2+2}{x^2}=+\infty$$

**4** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{-2x+4}$ ; $a=2^-$.

On étudie le signe du dénominateur :

✍ $-2x+4=0 \iff -2x=-4=0 \iff x=2$

✍ En appliquant la règle sur le signe des fonctions affines, on obtient :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $(-2x+4)$ | | $+$ | $0$ | - | |

✗ En $2^-$ :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}x^2+x+1=7\\ \lim\limits_{x\to2^-}-2x+4=0^+\quad \text{Par inverse } \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{-2x+4}=+\infty\end{array}\right\}\quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$$

## Exercice 3 — 11,5 points

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$$

et $\mathcal{F}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

3 pts **1** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

Limite en $+\infty$ :

Pour $x>0$ on a $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0 \text{ Limite de référence}\end{array}\right\}\quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$$

Limite en $0^+$ :

Pour $x>0$ on a $f(x)=\dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2}=\left(1-x^2-\ln x\right)\times\dfrac{1}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\\ \text{Comme } \lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty \text{ Limite de référence } \lim\limits_{x\to0^+}\left(1-x^2-\ln x\right)=+\infty\end{array}\right\}\quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{F}$ .

3 pts **2** Etudier les variations de $f$ .

Dérivée : Les fonctions $u : x \mapsto 1 - x^2 - \ln x$ et $v : x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $f = \dfrac{u}{v}$ donc, par théorème sur les quotients de fonctions dérivables on a $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ ce qui donne :

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}}$$

Signe de la dérivée : comme on travaille sur $]0;+\infty[$ on a $x > 0$ donc $x^3 > 0$, ainsi $f'(x)$ a le signe de $-3 + 2\ln x$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3}$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e^3}$, car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. et voici le tableau de variation de la fonction $f$ :
On déduit le tableau de variations de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $-1 - \frac{1}{2}e^{-3}$ | $\nearrow$ | $-1$ |

$$\begin{aligned}
f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1 - \left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 - \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} \\
&= \frac{1 - e^3 - \frac{3}{2}}{e^3} && \textbf{car } \ln(e^t) = t \\
&= \left(-e^3 - \tfrac{1}{2}\right)e^{-3} && \textbf{car } \tfrac{1}{e^t} = e^{-t} \\
&= -1 - \tfrac{1}{2}e^{-3}
\end{aligned}$$

0.5 pt **3** Montrer que $\mathcal{F}$ admet une asymptote horizontale $\mathcal{D}$ en $+\infty$ dont on précisera une équation.

$$\boxed{\text{Ayant } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1, \text{ on déduit que } \mathcal{F} \text{ admet une asymptote horizontale } \mathcal{D} \text{ d'équation } y = -1.}$$

2 pts **4** Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote $\mathcal{D}$.
On étudie le signe de $y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}}$
$y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}} = f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \dfrac{1 - x^2 - \ln x}{x^2} + 1 = \dfrac{1 - x^2 - \ln x}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$
Comme $x^2$ sur $]0;+\infty[$ ; on déduit que $y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}}$ a le signe de $1 - \ln x$.
$y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$
$y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow -\ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.
$\mathcal{F}$ est située au dessus de son asymptote $\mathcal{D}$ sur $]0;e[$.
$\mathcal{F}$ est située en dessous de son asymptote $\mathcal{D}$ sur $]e;+\infty[$.
$\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$ ont un seul point commun $A(e;-1)$

2 pts **5** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ et que $\alpha = 1$

D'après le théorème de la bijection :

✍ $f$ est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = ]0;e^{\frac{3}{2}}]$.

✍ $f$ est strictement décroissante sur l' intervalle $I = ]0; e^{\frac{3}{2}}]$.

✍ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -1 - \frac{1}{2}e^{-3}$

✍ $f$ réalise donc une bijection de $I = ]0; e^{\frac{3}{2}}]$ sur $\left[-1 - \frac{1}{2}e^{-3}; +\infty\right[$

Comme $0 \in \left[-1 - \frac{1}{2}e^{-3}; +\infty\right[$].5;.4[, l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique $\alpha$ dans $]0; e^{\frac{3}{2}}]$.

Il suffit alors de calculer $f(1) = \dfrac{1 - 1^2 - \ln 1}{1^2} = 0$ car $\ln 1 = 0$.

$\boxed{\text{Donc l 'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ et que } \alpha = 1}$

1 pt **6** En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | | $-$ | | | |
| Variations de $f$ | \|\| | ↘ | $0$ | ↘ | $-1 - \frac{1}{2}e^{-3}$ | ↗ | $-1$ |
| Signe de $f(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | - | | - | |

Une courbe non demandée, pour illustrer l'exercice :