Nom :	DS 09	TMATHS OISELET	Mai 2024
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 9	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1 — 9,5 points

9.5 pts

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1 Résoudre l'équation (E') : $y' - 3y = 0$.
$y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$.
(E') est du type $y' = ay$; les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{y = Ce^{3x} \text{ où } C \text{ désigne une constante réelle quelconque.}}$$

2 Démontrer qu'il existe une fonction $p : x \mapsto a\cos x + b\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation (E).
$p : x \mapsto a\cos x + b\sin x$ est une solution de (E) ssi $p'(x) - 3p(x) = \sin(x)$
Comme $p(x) = a\cos x + b\sin x$, on déduit en dérivant $p'(x) = -a\sin x + b\cos x$

$$\begin{aligned} p \text{ est solution de l'équation (E)} &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; p'(x) - 3p(x) = \sin(x) \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; -a\sin x + b\cos x - 3(a\cos x + b\sin x) = \sin(x) \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (-a-3b)\sin x + (b-3a)\cos x = \sin(x) \end{aligned}$$

$x = 0$ fournit $(-a-3b)\sin 0 + (-3a-3b)\cos 0 = \sin(0)$ soit $(a-3b)\times 0 + (b-3a)\times 1 = 0$ ainsi $b - 3a = 0$ puis $b = 3a$.
$x = \frac{\pi}{2}$ fournit $(-a-3b)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-3a-3b)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ soit $(a-3b)\times 1 + (-3a-3b)\times 0 = 1$ ainsi $-a - 3b = 1$.
On résout alors le système :

$$\begin{cases} b = 3a \\ a - 3b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ -a - 9a = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

Ainsi $p(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$ On forme alors $p'(x) - 3p(x) = \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x - 3\left(-\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x\right) = \sin x$

$$\boxed{\text{ayant } \forall x \in \mathbb{R}, p'(x) - 3pu(x) = \sin x,\ p \text{ est une solution particulière de l'équation différentielle } (E).}$$

3 Montrer que f est solution de (E) équivaut à $f - p$ solution de (E') : $y' - 3y = 0$.
On sait que p est une solution particulière de l'équation (E) ;
on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}; p'(x) - 3p(x) = \sin(x)$ ou encore
$\forall x \in \mathbb{R}; \sin(x) = p'(x) - 3p(x)$
D'où la chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) - 3f(x) = \sin(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) - 3fu(x) = p'(x) - 3p(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) - p'(x) = 3f(x) - 3p(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (f-p)'(x) - 3(f-p)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (f-p)' - 3(f-p) = 0 \\ &\Leftrightarrow (f-p) \text{ est solution de} (E') \end{aligned}$$

4 En déduire les solutions de (E).

$$
\begin{aligned}
f \text{ est solution de}(E) &\Leftrightarrow (f-p) \text{ est solution de}(E')\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (f-p)(x) = Ce^{3x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f(x) - p(x) = Ce^{3x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = p(x) + Ce^{3x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + Ce^{3x}
\end{aligned}
$$

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + Ce^{3x}$ où C désigne une constante réelle arbitraire.

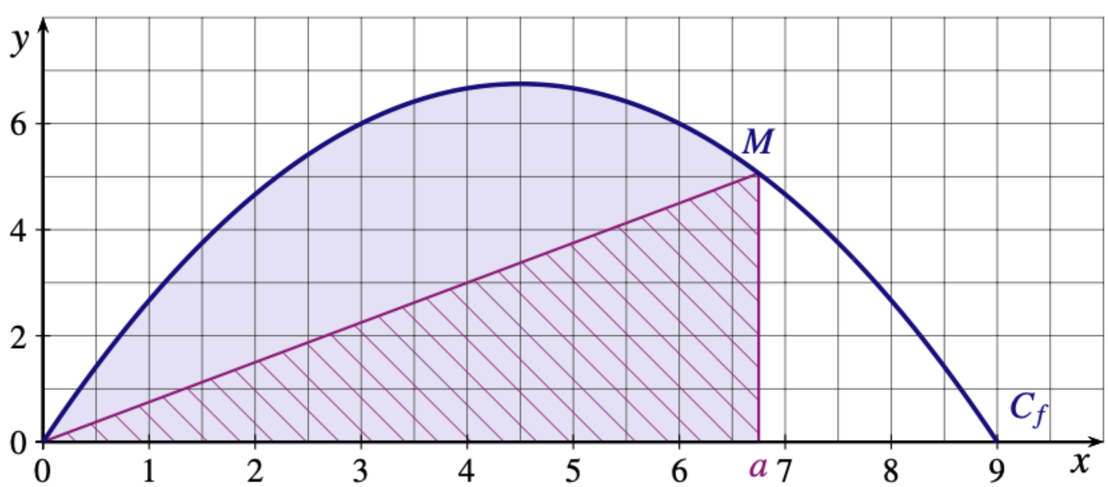
5 Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie $h(0) = 1$.
$h(0) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}\cos 0 - \frac{3}{10}\sin 0 + Ce^{0} = 1 \Leftrightarrow C = 1,1$.

Ainsi l'unique solution h de l'équation différentielle (E) vérifiant $h(0) = 1$ est définie par

$$h(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + 1,1e^{3x}$$

Exercice 2 — 6 points

6 pts Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = 3x - \dfrac{x^2}{3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

1 Quelle est l'ordonnée du point M du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a ? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.

L'ordonnée du point M d'abscisse a est $f(a) = 3a - \dfrac{a^2}{3}$

On déduit

$$\begin{aligned} T &= \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} \\ &= \frac{1}{2} a \times f(a) \\ &= \frac{a}{2} \times \left(3a - \frac{a^2}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2} a^2 - \frac{1}{6} a^3 \end{aligned}$$

2 Exprimer l'aire A en fonction de a du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
f étant continue et positive sur $[0;9]$; l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ vaut

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a \left(3x - \frac{x^2}{3}\right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{9} x^3\right]_0^a \\ &= \frac{3}{2} a^2 - \frac{1}{9} a^3 - 0 \end{aligned}$$

L'aire A en fonction de a du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ vaut $A = \frac{3}{2} a^2 - \frac{1}{9} a^3$

3 Déterminer a pour que $A = 2T$

$$\begin{aligned} A = 2T &\iff \frac{3}{2} a^2 - \frac{1}{9} a^3 = 2\left(\frac{3}{2} a^2 - \frac{1}{6} a^3\right) \\ &\iff 27a^2 - 2a^3 = 54a^2 - 6a^3 \\ &\iff 4a^3 - 27a^2 = 0 \\ &\iff a^2 (4a - 27) = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ ou } a = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 2T \iff a = 0 \text{ ou } a = \frac{27}{4}}$$

Exercice 3 — 7,5 points

7.5 pts

Les trois parties Aet B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

1 Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - e^{3x}\right) dx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(1-\mathrm{e}^{3x}\right)dx &= \left[x-\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_{-1}^{1}\\ &= 1-\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3}-\left(-1-\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3}\right)\\ &= 2+\tfrac{\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{3}}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\left(1-\mathrm{e}^{3x}\right)dx = 2+\frac{\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{3}}{3}}$$

2 Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $[1;2]$.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\begin{aligned}\mu &= \tfrac{1}{2-1}\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\\ &= \int_1^2 \frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx\end{aligned}$$

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|$

$$\begin{aligned}\mu &= \tfrac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{3}\left[\ln|x^3+1|\right]_1^2\\ &= \tfrac{1}{3}\left(\ln(9)-\ln 2\right)\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $[1;2]$ est $\mu=\frac{1}{3}(\ln(9)-\ln 2)$.

Partie B

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I=\displaystyle\int_0^{\pi}(2x+1)\cos x\,dx$

Posons $\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & \cos x\\ v(x) & = & 2x+1\end{array}\right.$, et $\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & \sin x\\ v'(x) & = & 2\end{array}\right.$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0\,;\,\pi]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\,;\,\pi]$, le théorème d'intégration par parties s'applique donc, et :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi}(2x+1)\times\cos x\,dx\\ &= [(2x+1)\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\sin x\,dx\\ &= [(2x+1)\sin x]_0^{\pi}-[-2\cos x]_0^{\pi}\\ &= [(2x+1)\sin x+2\cos x]_0^{\pi}\\ &= (2\pi+1)\sin\pi+2\cos\pi-(\sin 0+2\cos 0)\\ &= -2-2=-4\end{aligned}$$

$$\boxed{I=\int_0^{\pi}(2x+1)\cos x\,dx=-4}$$

Exercice 4 — 17 points

17 pts

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1 Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;1)$.
$\mathrm{A} \in \mathcal{C}_1 \iff f_1(0) = 1$, or $f_1(0) = 0 + e^0 = 1$

$$\boxed{\text{Ayant } f_1(0) = 1,\ \mathcal{C}_1 \text{ passe par le point A de coordonnées } (0{,}1).}$$

2 Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$ par somme on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$
- Limite en $-\infty$: on factorise par le terme prépondérant

  $$f_1(x) = x + e^{-x} = e^{-x}(1 + xe^{x})$$

  On utilise la limite de référence : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} (1 + xe^{x}) = 1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}\right\}$ par produit on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$
- f_1 est dérivable comme somme de fonctions dérivables et $f_1'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$
  On a utilisé la formule de dérivation :

  $$(e^{u})' = u'e^{u}$$

  Signe de la dérivée :

  $$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-x} > -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < \ln 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

  $$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
- On déduit le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

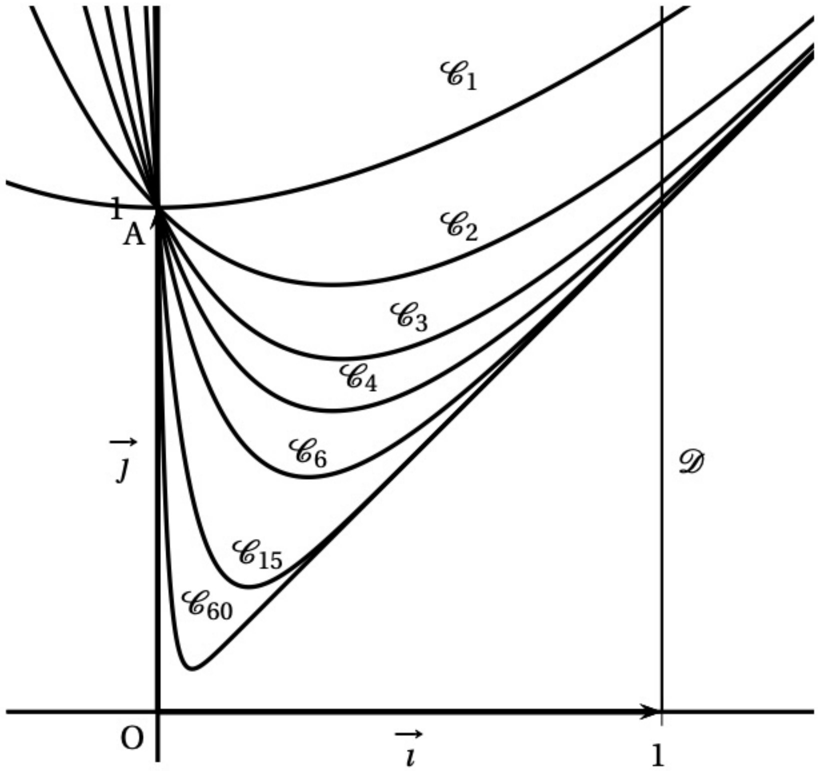
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x.$$

1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.
La fonction f_n est clairement continue et positive sur l'intervalle $[0;1]$, en effet si $x \in [0;1]$ alors $x \geq 0$ et pour tout réel x , on a $e^{-nx} > 0$, d'où par somme $f_n(x) > 0$.
$I_n = \displaystyle\int_0^1 (x + e^{-nx})\,\mathrm{d}x$ représente donc l'aire délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
La suite (I_n) semble décroissante et minorée par 0, et semble converger vers $\dfrac{1}{2}$, l'aire du triangle OIB où I(1 ;0) et B(1 ;1).

2 Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned} I_{n+1}-I_n &= \int_0^1 \left(x+e^{-(n+1)x}\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(x+e^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x+e^{-(n+1)x}\right)-\left(x+e^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x && \text{Linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \left(e^{-(n+1)x}-e^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1-e^{x}\right)\,\mathrm{d}x && e^{-(n+1)x}\times e^{x}=e^{-(n+1)x+x}=e^{-nx} \end{aligned}$$

$$I_{n+1}-I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1-e^{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

En déduire le signe de $I_{n+1}-I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.
Pour tout réel $x\in[0;1]$ on a : $0\leq x\leq 1$, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit :

$e^0\leq e^x\leq e^1$, soit $1\leq e^x$ ce qui donne $1-e^x\leq 0$ $\left.\begin{array}{l} 1-e^x\leq 0 \\ e^{-(n+1)x}>0 \end{array}\right\}$ par produit on obtient : $e^{-(n+1)x}\left(1-e^x\right)\leq 0$

En intégrant cette dernière inégalité de 0 à 1 ; $0<1$ on obtient $\displaystyle\int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1-e^x\right)\,\mathrm{d}x\leq 0$

Ainsi $I_{n+1}-I_n\leq 0$

- Ayant pour tout entier n ; $I_{n+1}-I_n\leq 0$, la suite (I_n) est décroissante.
- Par ailleurs comme f_n est positive sur $[0;1]$, par positivité de l'intégrale, on déduit $I_n\geq 0$, et donc la suite (I_n) est minorée par 0.
- On conclut que la suite (I_n) est convergente car elle est décroissante et minorée.

3 Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).
Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).
Tout d'abord

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \left(x+e^{-0\times x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}+1-0=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$I_0=\frac{3}{2}$$

Par ailleurs si $n\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left(x+e^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 \quad \text{ici } n\neq 0 \\ &= \frac{1}{2}-\frac{e^{-n}}{n}-\left(0-\frac{e^0}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{e^{-n}}{n}+\frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n}=0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0 \end{array}\right\}$ par produit on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{e^{-n}}{n}=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{e^{-n}}{n}=0 \end{array}\right\} \text{par somme on obtient : } \lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n=\frac{1}{2}}$$