Nom : .... *Prénom :*	**DS 09** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Devoir n° 9*	*Mai 2024* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1 — *9,5 points*

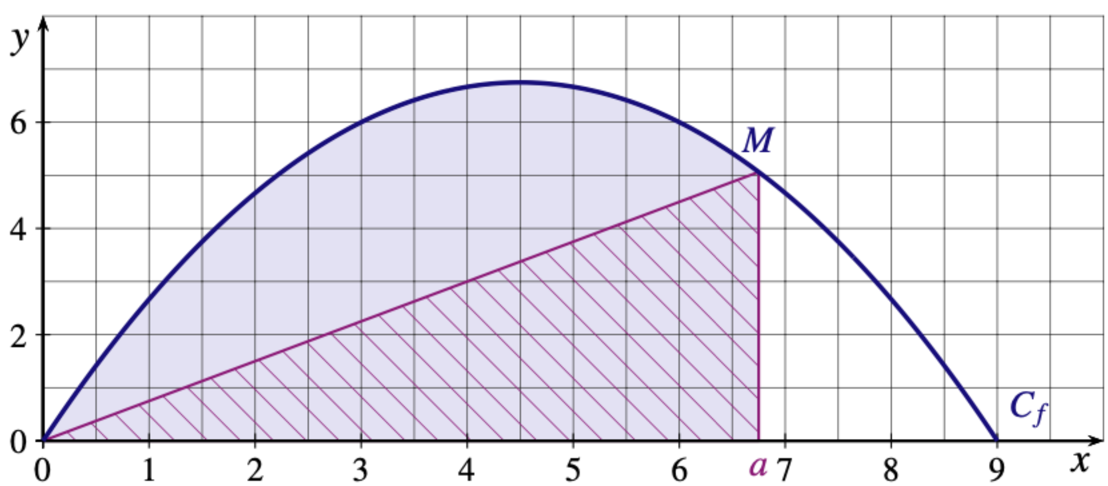
9.5 pts

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation (E') : $y' - 3y = 0$.
2. Démontrer qu'il existe une fonction $p : x \mapsto a\cos x + b\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation (E).
3. Montrer que f est solution de (E) équivaut à $f - p$ solution de (E') : $y' - 3y = 0$.
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie $h(0) = 1$.

Exercice 2 — *6 points*

6 pts Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = 3x - \dfrac{x^2}{3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

1. Quelle est l'ordonnée du point M du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a ? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.
2. Exprimer l'aire A en fonction de a du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
3. Déterminer a pour que $A = 2T$

Exercice 3 — 7,5 points

7.5 pts

Les trois parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

1. Calculer $\int_{-1}^{1}\left(1-e^{3x}\right)dx$

2. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ sur $[1;2]$.

Partie B

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I=\int_0^{\pi}(2x+1)\cos x\,dx$

Exercice 4 — 17 points

17 pts

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x)=x+e^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0;1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

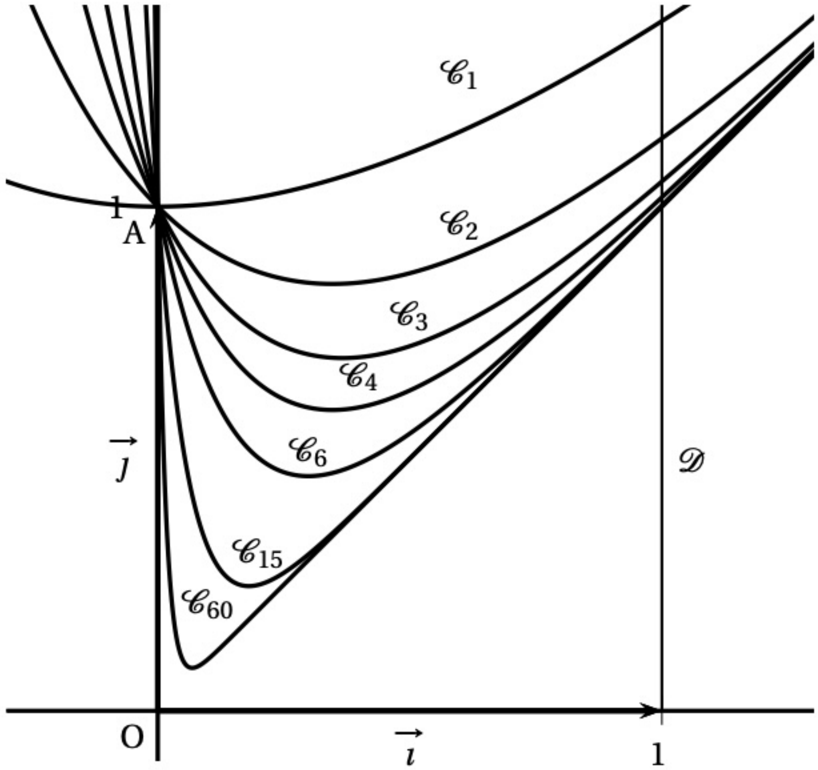
L ?objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n=\int_0^1\left(x+e^{-nx}\right)dx.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x)=x+e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=1$.



a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2 Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3 Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).