Bac S 19 Juin 2014

Bac S 19 Juin 2014

1 Exercice 1 : Fonctions et calcul intégral 5 points

Exercice 1

Commun à tous les candidats
Partie A
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}$$

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées (0,1).

   $A \in \mathcal{C}_1 \iff f_1(0) = 1$, or $f_1(0) = 0 + e^0 = 1$

   Ayant $f_1(0) = 1$, $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées (0,1).

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

   ✐ Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$ par somme on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

   ✐ Limite en $-\infty$: on factorise par le terme prépondérant

   $$f_1(x) = x + e^{-x} = e^{-x}\left(1 + xe^{x}\right)$$

   On utilise la limite de référence : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

   $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} (1 + xe^{x}) = 1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}\right\}$ par produit on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$

   ✐ f_1 est dérivable comme somme de fonctions dérivables et $f_1'(x) = 1 - e^{-x}$
   On a utilisé la formule de dérivation :

   $$(e^u)' = u'e^u$$

   Signe de la dérivée :

   $$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < \ln 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

   $$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

3. Le tableau de variation de f_1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f_1	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{R}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\,dx$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f_n(x) = x + e^{-nx}$$

   Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.

a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.
La fonction f_n est clairement continue et positive sur l'intervalle $[0;1]$, en effet si $x \in [0;1]$ alors $x \geq 0$ et pour tout réel x , on a $e^{-nx} > 0$, d'où par somme $f_n(x) > 0$.
$\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x$ représente donc l'aire délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
La suite (I_n) semble décroissante et minorée par 0, et semble converger vers $\dfrac{1}{2}$, l'aire du triangle OIB où I(1 ;0) et B(1 ;1).

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\,\mathrm{d}x$$

En déduire le signe de $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right) - \left(x + e^{-nx}\right)\mathrm{d}x && \text{Linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\mathrm{d}x && e^{-(n+1)x} \times e^x = e^{-(n+1)x+x} = e^{-nx}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\,\mathrm{d}x$$

Pour tout réel $x \in [0;1]$ on a :
$0 \leq x \leq 1$, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit :
$e^0 \leq e^x \leq e^1$, soit $1 \leq e^x$ ce qui donne $1 - e^x \leq 0$ $\left.\begin{array}{l} 1 - e^x \leq 0 \\ e^{-(n+1)x} > 0 \end{array}\right\}$ par produit on obtient : $e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right) \leq 0$

En intégrant cette dernière inégalité de 0 à 1 ; $0 < 1$ on obtient $\displaystyle\int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\mathrm{d}x \leq 0$

Ainsi $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leq 0$

- ✐ Ayant pour tout entier n ; $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leq 0$, la suite (I_n) est décroissante
- ✐ Par ailleurs comme f_n est positive sur [0 ;1], par positivité de l'intégrale, on déduit $\mathrm{I}_n \geq 0$, et donc la suite (I_n) est minorée par 0.
- ✐ On conclut que la suite (I_n) est convergente car elle est décroissante et minorée.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{n} - \left(0 - \frac{e^0}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{array}\right\}$ par produit on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{e^{-n}}{n} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{e^{-n}}{n} = 0 \end{array}\right\}$ par somme on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \dfrac{1}{2}$

2 Exercice 2 : Probabilités 5 points

Exercice 2

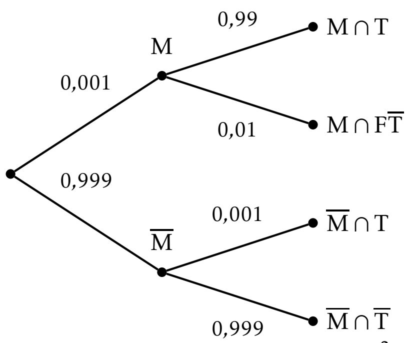
Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Partie A
Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %.
On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.



b) Démontrer que la probabilité $p(\text{T})$ de l'évènement T est égale à $1{,}989 \times 10^{-3}$.Calculons la probabilité de l'événement T.
$\text{T} = (\text{M} \cap \text{T}) \cup \left(\overline{\text{M}} \cap \text{T}\right)$.
La formule des probabilités totales donne

$$p(\text{T}) = p\,(\text{M} \cap \text{T}) + p\left(\overline{\text{M}} \cap \text{T}\right) = p(\text{M}) \times p_{\text{M}}(\text{T}) + p(\overline{\text{M}}) \times p_{\overline{\text{M}}}(\text{T})$$

soit $p(\text{T}) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}001 = 0{,}001989 = 1{,}989 \times 10^{-3}$

On a bien $p(\text{T}) = 1{,}989 \times 10^{-3}$

c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse. Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».
On veut calculer la probabilité de l'événement « Sachant que le test est positif, la personne soit malade ».
soit à calculer la probabilité conditionnelle :

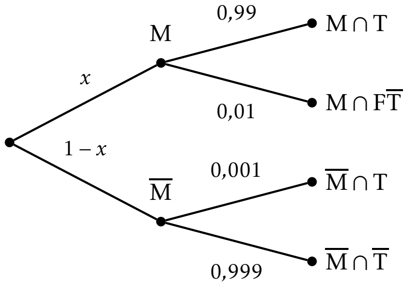
$$p_{\text{T}}\,(\text{M}) = \frac{p\,(\text{T} \cap \text{M})}{p(\text{T})} = \frac{0{,}001 \times 0{,}99}{0{,}1989 \times 10^{-3}} = \frac{990}{1989} = \frac{110}{221} \approx 0{,}498$$

$$p_{\text{T}}\,(\text{M}) \approx 0{,}498$$

$$\text{et donc } p_{\text{T}}\,(\text{M}) < \frac{1}{2}$$

L'affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade » est donc vraie.

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95.
On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population. À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?
Tout d'abord on représente la situation avec l'arbre de probabilité mis à jour :



On cherche alors x tel que $p_T(M) \geq 0{,}95$

$$p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)}$$

Calculons la probabilité de l'événement T.
$T = (M \cap T) \cup \left(\overline{M} \cap T\right)$.
La formule des probabilités totales donne

$$p(T) = p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) = p(M) \times p_T(C) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T)$$

$$\text{soit } p(T) = x \times 0{,}99 + (1-x) \times 0{,}001$$

$$\begin{aligned}
p_T(M) \geq 0{,}95 &\iff \frac{0{,}99 \times x}{x \times 0{,}99 + (1-x) \times 0{,}001} \geq 0{,}95 \\
&\iff \frac{1000 \times 0{,}99 \times x}{1000 \times (x \times 0{,}99 + (1-x) \times 0{,}001)} \geq 0{,}95 \\
&\iff \frac{990x}{990x + 1 - x} \geq 0{,}95 \\
&\iff \frac{990x}{989x + 1} \geq 0{,}95 \\
&\iff 990x \geq 0{,}95 \times (989x + 1) \qquad \text{en multipliant par } (989x+1) > 0 \\
&\iff x \geq \frac{19}{1009}
\end{aligned}$$

Le laboratoire décide de commercialiser un test dès que $x \geq \dfrac{19}{1009}$

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg.
   On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

   a) Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.
   2ND DISTR 2 NORMALCDF(890 , 920 , 900 , 7) EXE
   $\text{N}ormalcdf(890{,}920{,}900{,}7) \approx 0{,}921$

   $P(890 \leq X \leq 920) \approx 0{,}921$ à 10^{-3} près.

   b) Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0{,}99$ à 10^{-3} près.
   Posons $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 900}{7}$. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   Z suit la loi normale centrée réduite.

   $$P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0{,}99 \Leftrightarrow p\left(\frac{900 - h - 900}{7} \leqslant \frac{X - 900}{7} \leq \frac{900 + h - 900}{7}\right) \approx 0{,}99 \Leftrightarrow p\left(-\frac{h}{7} \leq Z \leqslant \frac{h}{7}\right) \approx 0{,}99.$$

   On doit donc avoir

   $$p\left(-\frac{h}{7} \leq Z \leqslant \frac{h}{7}\right) \approx 0{,}99 \Leftrightarrow 2\pi\left(\frac{h}{7}\right) - 1 \approx 0{,}99 \iff \pi\left(\frac{h}{7}\right) \approx \frac{1{,}99}{2} \iff \frac{h}{7} \approx \pi^{-1}(0{,}995) \Leftrightarrow h \approx 18{,}030$$

   La valeur attendue de h est donc 18,030.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production.
   La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.
   Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Remarque : l'énoncé sous-entend que la taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise et donc le tirage de l'échantillon puisse se faire dans les conditions d'application d'une loi binomiale... il faudrait toujours le préciser.
Ici $p = 0{,}97, n = 1000$, donc on a bien $n \geq 30, np = 970 \geq 5, n(1-p) = 30 \geq 5$ et pour $\alpha = 0{,}05$, on a $u_\alpha \approx 1{,}96$.

L'intervalle $\mathrm{I}_n = \left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{pq}{n}}; p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right] = \left[0{,}97 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97\times 0{,}03}{1000}}; 0{,}97 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97\times 0{,}03}{1000}}\right] \approx [0{,}959; 0{,}981]$ de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 est donc environ $[0{,}959; 0{,}981]$.

Sur 1000 comprimés, 53 sont non conformes et donc 947 sont conformes, soit une fréquence de $\dfrac{947}{1000} = 0{,}947$: cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Les réglage faits par le laboratoire ne sont donc pas convenables.

3 Exercice 3 : Nombres complexes 5 points

Exercice 3

Commun à tous les candidats

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{Z}^2 + 4\mathrm{Z} + 16 = 0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
   On calcule $\Delta = 16 - 4\times 16 = -48$. Comme $\Delta < 0$, l'équation a deux racines complexes conjuguées :

$$\mathrm{Z}_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + i\sqrt{48}}{2} = \frac{-4 + i4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3} \text{ et } \mathrm{Z}_2 = \overline{\mathrm{Z}_1} = -2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\mathcal{S} = \{-2 + 2i\sqrt{3}; -2 - 2i\sqrt{3}\}$$

   Forme exponentielle des solutions :

$$\mathrm{Z}_1 = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\mathrm{Z}_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \mathrm{Z}_2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer a^2 sous forme algébrique. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
   On écrira les solutions sous forme algébrique.

$$a^2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{Z}_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \iff z^2 = a^2 \iff z^2 - a^2 = 0 \iff (z-a)(z+a) = 0 \iff z = a \text{ ou } z = -a$$

   les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ et $-a = -1 - i\sqrt{3}$

3. Restitution organisée de connaissances
   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - \mathrm{i}y$. Démontrer que :
   - ✐ Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z2}$.

$$\begin{aligned}
\text{Posons } z_1 &= a + ib \\
z_2 &= c + id \\
z_1.z_2 &= (a+ib).(c+id) \\
&= (ac - bd) + i(ad + bc) \\
\text{Ainsi } \overline{z_1.z_2} &= (ac - bd) - i(ad + bc) \\
\text{Par ailleurs } \overline{z_1}.\overline{z_2} &= (a - ib).(c - id) \\
&= (ac - bd) - i(ad + bc)
\end{aligned}$$

On a donc bien $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z2}$

✐ Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

- ✐ Initialisation :Au rang 1; on a $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(1)$ est vrai.
- ✐ Hérédité :Soit $p \geq 1$, on suppose que : $\overline{z^p} = (\overline{z})^p$ HR .

  On doit prouver que : $\overline{z^{p+1}} = (\overline{z})^{p+1}$

$$\begin{aligned} \overline{z^{p+1}} &= \overline{z^p \times z} \\ &= \overline{z^p} \times \overline{z} \quad \text{D'après la propriété ci-dessus !} \\ &= \overline{z}^p \times \overline{z} \quad \text{D'après HR !} \\ &= (\overline{z})^{p+1} \end{aligned}$$

- ✐ Conclusion :La propriété est vraie au rang 1, pour $k \geq 1$; $\mathcal{P}(k)$ vraie entraîne $\mathcal{P}(k+1)$ vraie,le principe de récurrence s'applique et donc pour tout $n \geq 1$: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.si z est une solution de l'équation (E) alors :

$$\begin{aligned} &z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \\ &\overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} \\ &\overline{z^4} + \overline{4z^2} + \overline{16} = 0 \quad \text{car } \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\ &\overline{z}^4 + 4\overline{z}^2 + 16 = 0 \quad \text{car } \overline{z^4} = \overline{z}^4 \ldots \end{aligned}$$

   Ainsi si z est une solution de l'équation (E) alors : alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
   Comme a et $-a$ sont deux solutions de (E); on déduit que leurs conjugués $\overline{a} = 1 - i\sqrt{3}$ et $-\overline{a} = -1 + i\sqrt{3}$ sont aussi solutions de (E). En conclusion (E) a pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \{1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$$

4 *Exercice 4 : Géométrie dans l'espace 5 points*

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF). On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   a) Donner les coordonnées des points D et F.
   Dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ on a D $(0,0,1)$ et F milieu de B $(1,0,0)$ C $(0,1,0)$ donc F a pour coordonnées $(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   Ainsi $\overrightarrow{\text{DF}}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 1 - 0\right)$

   M$(x ; y ; z) \in$ (DF) vérifie $\overrightarrow{\text{DM}} = t\overrightarrow{\text{DF}}$, on a donc : $\begin{cases} x - 0 &= \frac{1}{2}t \\ y - 0 &= \frac{1}{2}t \\ z - 1 &= t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2}t \\ y &= \frac{1}{2}t \\ z &= 1 - t \end{cases}$

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

   $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{\text{DF}}$ car $\mathcal{P}$ est orthogonal à la droite (DF).

   Ainsi $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne du type

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + d = 0$$

   A$(0,0,0,0) \in \mathcal{P}$ donc $d = 0$.
   $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0$

$\boxed{\mathcal{P} \text{ admet pour équation cartésienne } x+y-2z=0}$

d) Calculer les coordonnées du point H.

$\mathrm{H}(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{DF}\cap\mathcal{P})$ vérifie le système : $\begin{cases} x+y-2z &= 0\ (1)\\ x &= \frac{1}{2}t\\ y &= \frac{1}{2}t\\ z &= 1-t \end{cases}$ $(1) \iff \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t-2(1-t)=0 \iff 3t=2 \iff t=\frac{2}{3}$

En reportant $t=\frac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de la droite (DF) on obtient :

$\boxed{\text{H a pour coordonnées } \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}$

e) Démontrer que l'angle $\widehat{\mathrm{EHG}}$ est un angle droit.

On a $\overrightarrow{\mathrm{EH}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EH}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{EH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}} = -\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = -\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=0$$

Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{EH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=0$, ce qui prouve que l'angle $\widehat{\mathrm{EHG}}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{DM}} = t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{EMG}}$. Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

a) Démontrer que $\mathrm{ME}^2 = \frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$.M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{DM}} = t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ a pour coordonnées (x,y,z) tels que : $\begin{cases} x &= \frac{1}{2}t\\ y &= \frac{1}{2}t\\ z &= 1-t \end{cases}$

$$\overrightarrow{\mathrm{ME}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\\ 0-\frac{1}{2}t\\ t-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-t)\\ -\frac{1}{2}t\\ t-1\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{ME}^2 &= \left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+(t-1)^2\\ &= \frac{1}{4}(t-1)^2+\frac{1}{4}t^2+(t-1)^2\\ &= \frac{5}{4}(t-1)^2+\frac{1}{4}t^2\\ &= \frac{5}{4}(t^2-2t+1)+\frac{1}{4}t^2\\ &= \frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M. En déduire que $\mathrm{ME}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

On a G milieu de A $(0,0,0)$ C $(0,1,0)$ donc G a pour coordonnées $(0,\frac{1}{2},0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{MG}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t\\ \frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ 1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-t)\\ -\frac{1}{2}t\\ t-1\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{MG}^2 &= \left(\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)^2+(1-t)^2\\ &= \frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}\\ &= \mathrm{ME}^2\end{aligned}$$

Ayant $MG^2 = ME^2$; on a prouvé que ME = MG et donc le triangle MEG est isocèle en M.

On appelle K le milieu de [EG]. La droite (MK) est donc une hauteur et une bissectrice du triangle MEG et $\widehat{EMK} = \frac{\alpha}{2}$.
Dans le triangle MEG rectangle en K on a : $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{EK}{ME}$
Or $EK = \frac{EG}{2} = \frac{\sqrt{0{,}5}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Par conséquent :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{EK}{ME} \Leftrightarrow ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

.

c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal. En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

- ✐ Première méthode : La fonction sin est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
  Par conséquent α maximale $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ maximal.
- ✐ Deuxième méthode : Les fonctions $\alpha \mapsto \alpha$ et $\alpha \mapsto \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
  $\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)' = \frac{\alpha'}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
  α ne prend des valeurs que dans $[0;\pi]$ donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0$ Par conséquent :
  le signe de $\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$? = le signe de α
  Par conséquent α maximale $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ maximal.
  Le produit $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est constant.
  Par conséquent α maximale $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ maximal $\Leftrightarrow$ ME minimal.

d) Conclure.

- ✐ Première méthode : Pour déterminer le minimum de ME on va trouver la valeur de t telle que $\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$ soit minimal.
  Il s ?agit de trouver l'abscisse du sommet de la parabole correspondante :

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{6}$$

- ✐ Deuxième méthode : on étudie les variation de $\phi : t \mapsto: \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$
  ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\phi'(t) = \frac{3}{2} \times 2t - \frac{5}{2} = 3t - \frac{5}{2}$$

$$\phi'(t) > 0 \iff 3t - \frac{5}{2} > 0 \iff t > \frac{5}{6}$$

d' où le tableau de variation de ϕ sur $\mathbb{R}$:

t	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
Signe de $\phi'(t)$		$-$	0	$+$	
Variation de ϕ	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{24}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\phi\left(\frac{5}{24}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{25}{36} - \frac{5}{2} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{4} = \frac{5}{24}$$

Par conséquent les coordonnées du point M cherché sont $\left(\frac{5}{12};\frac{5}{12};\frac{1}{6}\right)$.

On a alors $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\text{EK}}{\text{ME}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{5}{24}}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$

On déduit $\frac{\alpha}{2}=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

Le maximum de l'angle α est donc $2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\approx 101{,}5°$

5 Exercice 5 : Spécialité 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.
  Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0=200$ et celui du bassin B est $b_0=100$.

1. Justifier que $a_1=400$ et $b_1=300$ puis calculer a_2 et b_2.
   On a $a-1=2b_0+200=400$ et $b_1=a_0+100=300$

   $a_2=2b_1+200=800$ et $b_2=a_1+100=400$
   On a donc $a_{n+1}=2b_n+200$ et $b_{n+1}=a_n+100$
2. On désigne par A et B les matrices telles que $\text{A}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$ et $\text{B}=\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $\text{X}_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.

   a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $\text{X}_{n+1}=\text{AX}_n+\text{B}$.

$$\text{AX}_n+\text{B}=\begin{pmatrix}2b_n\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2b_n+200\\a_n+100\end{pmatrix}$$

$$=\text{X}_{n+1}$$

   b) Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\text{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\text{B}$.

   On cherche les valeurs de $(x;y)$ telles que :

$$\begin{cases} x = 2y + 200 \\ \\ y = x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 200 \\ \\ y = 2y + 200 + 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 200 \\ \\ y = -300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -400 \\ \\ y = -300 \end{cases}$$

c) Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 400 \\ \\ b_{n+1} + 300 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2b_n + 200 + 400 \\ \\ a_n + 100 + 300 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(b_n + 300) \\ \\ a_n + 400 \end{pmatrix}$$

$$= AY_n$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.
   a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n,$Z_{n+1} = 2Z_n$.
   $Z_{n+1} = Y_{2(n+1)} = Y_{2n+2} = AY_{2n+1} = A^2Y_{2n} = A^2Z_n$

   On a $A^2 = 2I$ où I est la matrice identité.
   Par conséquent $Z_{n+1} = 2Z_n$.

   b) On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,

$$Y_{2n} = 2^nY_0.$$

   En déduire que $Y_{2n+1} = 2^nY_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

   $Y_{2n+1} = AY_{2n} = 2^nAY_0 = 2^nY_1$
   Or $Y_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ \\ 400 \end{pmatrix}$ donc $Y_{2n} = \begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ \\ 400 \end{pmatrix}$
   Par conséquent $a_{2n} = 600 \times 2^n?400$

   $Y_1 = \begin{pmatrix} 800 \\ \\ 600 \end{pmatrix}$ donc $Y_{2n+1} = \begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ \\ 600 \end{pmatrix}$
   Par conséquent $a_{2n} = 800 \times 2^n?400$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10000 poissons.

   a) On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a,p et $n$sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

   Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.
   Si p est pair alors $p = 2k$ par conséquent, dans l'algorithme, $n = k$ et on calcule $a_{2k} = a_p$ d'après la question précédente.
   Si p est impaire alors $p = 2k + 1$ par conséquent, dans l'algorithme, $n = \frac{p-1}{2} = k$ et on calcule $a_{2k+1} = a_p$ d'après la question précédente.
   Dans tous les cas on calcule la population du bassin A au bout de p années.

   b) Ecrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Variables :	a,p et $n$sont des entiers naturels.
Initialisation :	p prend la valeur 0.
	a prend la valeur 200.
Traitement :	
	Tant que : $a \leq 10000$
	p prend la valeur $p+1$
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher p.