Nom : .... *Prénom :*	**DS 03**	**TSTI2D1** *Nov. 2021* *Devoir n° 07* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *2 points*

Je connais mon cours !

2 pts **1** Compléter les formules suivantes :

- $\mathrm{e}^0 = 0$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$

Exercice 2 — *4 points*

4 pts **Simplifications**

Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = (\mathrm{e}^x)^3 \times \mathrm{e}^{2x} \qquad B = \frac{\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{x+2}} \qquad C = \frac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{3x}} \qquad D = \frac{(\mathrm{e}^{3x})^2 \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-3x}}$$

$$\begin{aligned} A &= (\mathrm{e}^x)^3 \times \mathrm{e}^{2x} \\ &= \mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{2x} \\ &= \mathrm{e}^{5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{x+2}} \\ &= \mathrm{e}^{x-1-(x+2)} \\ &= \mathrm{e}^{x-1-x-2} \\ &= \mathrm{e}^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &== \tfrac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{3x}} \\ &= (\mathrm{e}^{x-x}) \times \mathrm{e}^{-3x} \\ &= \mathrm{e}^0 \times \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-2x} \\ &= \mathrm{e}^{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \tfrac{(\mathrm{e}^{3x})^2 \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-3x}} \\ &= \mathrm{e}^{6x} \times \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{3x} \\ &= \mathrm{e}^{10x} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \mathrm{e}^{5x} \qquad B = \mathrm{e}^{-3} \qquad C = \mathrm{e}^{-3x} \qquad D = \mathrm{e}^{10x}}$$

Exercice 3 — *5 points*

3 pts **1**

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 0 &\iff 2\mathrm{e}^{2x} = 2 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} = 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^0 \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{0\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x^2+3} = \mathrm{e}^{7x} &\iff 2x^2 + 3 = 7x \\ &\iff 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 49 - 24 = 25$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{7+5}{4} = 3$ $\quad x_2 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2} ; 3\right\}$

2 pts **2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\left(e^{2x}-3\right) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\left(e^{2x+1}-e^{2-5x}\right) \geqslant 0 &\iff e^{2x+1} \geqslant e^{2-5x}\\ &\iff 2x+1 \geqslant 2-5x\\ &\iff 7x \geq 1\\ &\iff x \geq \frac{1}{7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left[\frac{1}{7};+\infty\right[}$$

Exercice 4 — 3 points

3 pts Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x)=x^2-3x+e^{-x}$
  On utilise ici la formule $(e^u)'=u'e^u$

$$\boxed{f'(x)=2x-3-e^{-x}}$$

- $g(x)=xe^x$
  g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $g=uv$, d'où $g'=u'v+v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & =x \\ v(x) & =e^x\end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & =1 \\ v'(x) & =e^x\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}g'(x) &= 1\times e^x+e^x\times 1\\ &= e^x(x+1)\end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x)=e^x(x+1)}$$

- $h(x)=e^{2x+1}$ On utilise ici la formule $(e^u)'=u'e^u$

$$\boxed{h'(x)=e^{2x+1}}$$

Exercice 5 — 3 points

3 pts Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(4x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\end{array}\right\}\text{ par composée } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x}=+\infty$$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\end{array}\right\}\text{ par composée } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x}-2x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\end{array}\right\}\text{ par composée } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x}=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par somme } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x}-2x=+\infty$$

Exercice 6 — 8 points

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{3x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

2 pts **1** Calculer limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.

✍ Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{array}\right\}$ par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

✍ Limite en $-\infty$: La fonction exponentielle est prépondérante sur les puissances(croissances comparées), comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x) = 0$, on déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3 pts **2** Montrer que $f'(x) = (1+3x)e^{3x}$ puis étudier les variations de f.

f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = 1+3x \\ v(x) & = e^{3x} \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 3 \\ v'(x) & = 3e^{3x} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{3x} + 3e^{3x} \times x \\ &= e^{3x}(1+3x) \end{aligned}$$

1 pt **3** Dresser alors le tableau de variations.

✍ On étudie le signe de la dérivée :

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x on a $e^{3x} > 0$, ainsi $f'(x)$ a le signe de $1+3x$.
- $$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 1+3x = 0 \\ &\iff 3x = -1 \\ &\iff x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

✍ Comme $a = 3$, la fonction affine $1+3x$ est du signe de $a = 3$ après le 0.

✍ On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘	$-\frac{1}{3e}$	↗	$+\infty$

2 pts **4** Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$ est une primitive de f. F est une primitive de f signifie $F' = f$. F est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $F = uv$, d'où $F' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) \\ v(x) & = e^{3x} \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = \frac{1}{3} \\ v'(x) & = 3e^{3x} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{3x} \times \frac{1}{3} + 3e^{3x} \times \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) \\ &= e^{3x}\left(\frac{1}{3} + 3 \times \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)\right) \\ &= e^{3x}\left(\frac{1}{3} + 3 \times \frac{x}{3} - 3 \times \frac{1}{9}\right) \\ &= xe^{3x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Comme } F' = f,\ F \text{ est bien une primitive de } f.}$