Nom : .... *Prénom :*	**DS10**	2nde 09 Oiselet *Avril 2024* *Devoir n° 10* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.*** *Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.*

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 4 points

On considère la série statique suivante : 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 17 ; 20

1 pt **1** Calculer la moyenne de cette série.

La moyenne de cette série est $\dfrac{2+5+6+\cdots+20}{12} = \dfrac{126}{12} = \dfrac{21}{2} = 10,5$;

$$\boxed{\overline{x} = 10,5}$$

1 pt **2** Que vaut la médiane de cette série ?

L'effectif total N est 12, nombre pair. $\dfrac{N}{2} = 6$.

La médiane est la moyenne entre les valeurs de rang 6 et 7 : Med $= \dfrac{x_6+x_7}{2} = \dfrac{9+10}{2} = 9,5$;

$$\boxed{\text{Me} = 9,5}$$

2 pts **3** Déterminer les premier et troisième quartiles

- Premier quartile : $\dfrac{N}{4} = 3$ donc $Q_1 = x_3 = 6$: le premier quartile est 6.
- Troisième quartile : $3\dfrac{N}{4} = 9$ donc $Q_3 = x_9 = 14$: le premier quartile est 14.

$$\boxed{Q_1 = 6 \quad ; \quad Q_3 = 14}$$

Exercice 2 — 5 points

une société de location de véhicules possède un parc de 800 véhicules.
Pour chaque marque, la société possède deux modèles de véhicules : « essence » ou « Diesel ».
Durant l'année, chaque véhicule est immobilisé pour subir des entretiens, des réglages, des vidanges, es réparations, etc.
Pour l'ensemble des 300 véhicules « Diesel » de la société, on a étudié, au cours de l'année 2015, le nombre de journée d'immobilisation. on a obtenu la série statistique suivante :

Nombre de journées d'immobilisation	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de véhicules concernés	11	28	86	121	120	88	34	12
Efectifs cumulés croissants	11	39	125	246	366	454	488	500

1 pt **1** Calculer la moyenne $\overline{x}$ de la série (on arrondira le résultat à 0,1 près).

La moyenne de la série est :
$\dfrac{(1\times 11)+\cdots+(8\times 12)}{500} = \dfrac{2\,271}{500} = 4,542$.

$$\boxed{\overline{x} = 4,542}$$

1 pt **2** **a.** Compléter le tableau.

1 pt **b.** Déterminer la médiane de la série.

L'effectif total est 500, nombre pair.

$\dfrac{500}{2} = 250$. La médiane est donc la moyenne entre les valeurs de rang 250 et 251.

Med $= \dfrac{x_{250} + x_{251}}{2} = \dfrac{5+5}{2} = 5$.

$$\boxed{\text{Med} = 5}$$

1 pt **3** Déterminer les premier et troisième quartile de la série. Déterminons les quartiles.

$\dfrac{N}{4} = \dfrac{500}{4} = 125\,;\ Q_1 = x_{125} = 3$.

$3 \times \dfrac{N}{4} = 375\,;\ Q_3 = x_{375} = 6$.

$$\boxed{Q_1 = 3 \quad ; \quad Q_3 = 6}$$

1 pt **4** Calculer le pourcentage de voitures immobilisées quatre jours ou plus.

Le nombre de voitures immobilisée quatre jours ou plus est 500-125=375.

Le pourcentage correspondant est $\dfrac{375}{500} = \dfrac{750}{1000} = 0,75 = \dfrac{75}{100} = \boxed{75\,\%}$.

Le pourcentage de voitures immobilisées quatre jours ou plus est de 75 %.

: attention à la notation %; $x\,\%$ signifie $\dfrac{x}{100}$ donc $0,75 = \dfrac{75}{100} = 75\,\%$.

Si on effectue un produit par 100, on obtient le nombre devant le symbole % : $0,75 \times 100 = 75$ donc le pourcentage de voitures immobilisées autre jours ou plus est 75 %.

Mais $0,75 \times 100 = 75 = \dfrac{7500}{100} = 7\,500\,\%$.

Exercice 3 — 6 points

6 pts

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1

La fonction u définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

est impaire.

Corrigé

On a $u(-1) = 2$ et $u(1) = 0$ donc $u(-1) \neq -u(1)$ ce qui montre que la fonction u n'est pas impaire.

Affirmation 2

La courbe représentative de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(x) = x^4$$

est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

Corrigé

- L'intervalle $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout réel x on a :

$$v(-x) = (-x)^4 = x^4 = v(x)$$

Donc la fonction v est paire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

Affirmation 3

L'ensemble de définition de la fonction w définie par :

$$w(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

est l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.

Corrigé

La fonction x est définie si :

$$16 - x^2 \geqslant 0 \iff -x^2 \geqslant -16 \iff x^2 \leqslant 16$$

Le plus simple est d'utiliser le tableau de variations de la fonction carré :

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	16	0	16	$+\infty$

Donc :

$$\boxed{x^2 \leqslant 16 \iff x \in [-4\ ;\ 4]}$$

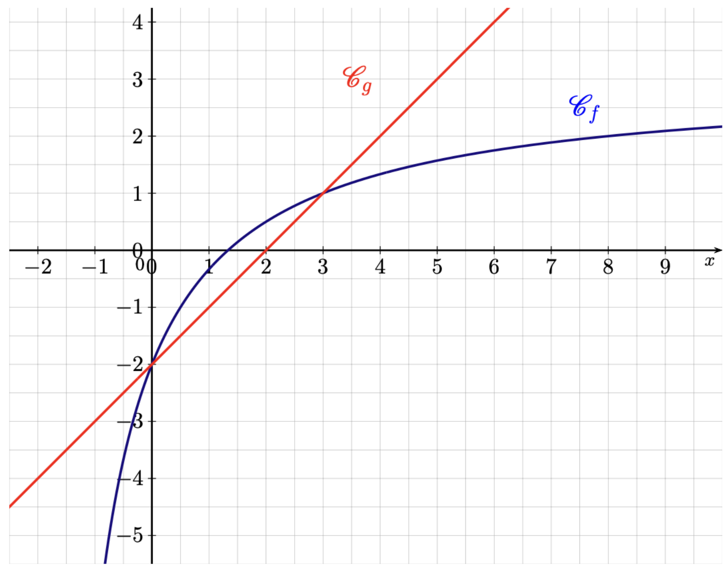
Exercice 4 — 15 points

15 pts Les questions 5 et 6 sont en Bonus !

Soit f la fonction définie pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3x-4}{x+2}$$

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

Corrigé

On a

$$f(0)=\frac{3\times 0-4}{0+2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Donc les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées sont $\underline{(0\,;\,-2)}$.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Corrigé

Pour x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x)=0 \iff \frac{3x-4}{x+2}=0 \iff \begin{cases}3x-4=0\\ \text{et } x+2\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\ \text{et } x\neq -2\end{cases}$$

Donc les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont $\underline{\left(\frac{4}{3}\,;\,0\right)}$.

3. Étudier le signe de $f(x)$ (avec un tableau de signe).

Corrigé

- Signe de $(3x-4)$.

$$\begin{cases} 3x-4=0 \iff x=\dfrac{4}{3} \\ 3x-4>0 \iff x>\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

- Signe de $(x+2)$.

$$\begin{cases} x+2=0 \iff x=-2 \\ x+2>0 \iff x>-2 \end{cases}$$

- Donc :

x	-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
signe de $3x-4$		$-$	0	$+$	
signe de $x+2$	0	$+$		$+$	
signe de $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+2}$	$\|$	$-$	0	$+$	

4. Étude des variations de f.

4. a. Montrer que pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x)=3-\frac{10}{x+2}$$

Corrigé

Pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$ on a :

D'une part :

$$f(x)=\frac{3x-4}{x+2}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} 3-\frac{10}{x+2} &= \frac{3(x+2)}{x+2}-\frac{10}{x+2} \\ &= \frac{3(x+2)-10}{x+2} \\ &= \frac{3x+6-10}{x+2} \\ &= \frac{3x-4}{x+2}=f(x) \end{aligned}$$

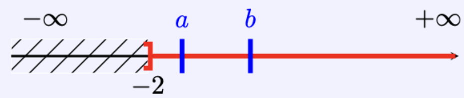
Donc pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$ on a :

$$\boxed{f(x)=3-\frac{10}{x+2}}$$

4. b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.
Dresser alors le tableau de variations de la fonction f.

Corrigé

Soit deux réels a et b de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.



$$\begin{aligned}
-2 < a \leqslant b & \\
0 < a+2 \leqslant b+2 &: \text{ On ajoute 2 à chaque membre ;}\\
\frac{1}{a+2} \geqslant \frac{1}{b+2} &: \text{ On compose par la fonction inverse \underline{décroissante sur }]0\,;\,+\infty[\text{, l'ordre change ;}}\\
\frac{-10}{a+2} \leqslant \frac{-10}{b+2} &: \text{ On multiplie par } -10<0\text{, l'ordre change ;}\\
\frac{-10}{a+2}+3 \leqslant \frac{-10}{b+2}+3 &: \text{ On ajoute 3 à chaque membre ;}\\
f(a) \leqslant f(b) &
\end{aligned}$$

On vient de prouver que :

$$\boxed{-2 < a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)}$$

La fonction f est donc <u>croissante sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$</u>.

x	-2	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	3(Hors Programme)

5. Soit g la fonction affine telle que $g\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $g(2) = 0$.
Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x puis construire la droite $\mathscr{C}_g$ qui représente cette fonction affine.

Corrigé

- La fonction g est affine donc de la forme $g(x) = mx + p$.
- D'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$m = \frac{g\left(\frac{5}{2}\right) - g(2)}{\frac{5}{2} - 2} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}} = 1$$

- Donc $g(x) = x + p$, il nous reste à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

$$g(2) = 0 \iff 2 + p = 0 \iff p = -2$$

- Donc <u>$g(x) = x - 2$</u>.

6. <u>Position relative des deux courbes</u>.
On pourra admettre pour la suite que $g(x) = x - 2$.

6. a. Montrer pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x) - g(x) = \frac{-x^2+3x}{x+2}$$

Corrigé

Pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \frac{3x-4}{x+2} - (x-2) \\
&= \frac{3x-4}{x+2} - \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} \\
&= \frac{3x-4-(x-2)(x+2)}{x+2} \\
&= \frac{3x-4-(x^2-4)}{x+2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) - g(x) = \frac{-x^2+3x}{x+2}}$$

6. b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Corrigé

Pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x) - g(x) = \frac{-x^2+3x}{x+2} = \frac{x(-x+3)}{x+2}$$

Étudions le signe de chaque facteur :

- Signe de x. Trivial
- Signe de $(-x+3)$.

$$\begin{cases} -x+3=0 \iff x=3 \\ -x+3>0 \iff x<3 \end{cases}$$

- Signe de $(x+2)$.

$$\begin{cases} x+2=0 \iff x=-2 \\ x+2>0 \iff x>-2 \end{cases}$$

- Donc :

x	-2		0		3		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x+2$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $f(x)-g(x)=\dfrac{x(-x+3)}{x+2}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
Position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$	$\Vert$	$\mathscr{C}_f$ au dessous de $\mathscr{C}_g$	0	$\mathscr{C}_f$ au dessus de $\mathscr{C}_g$	0	$\mathscr{C}_f$ au dessous de $\mathscr{C}_g$	

Ou retrouve bien graphiquement ce résultat :