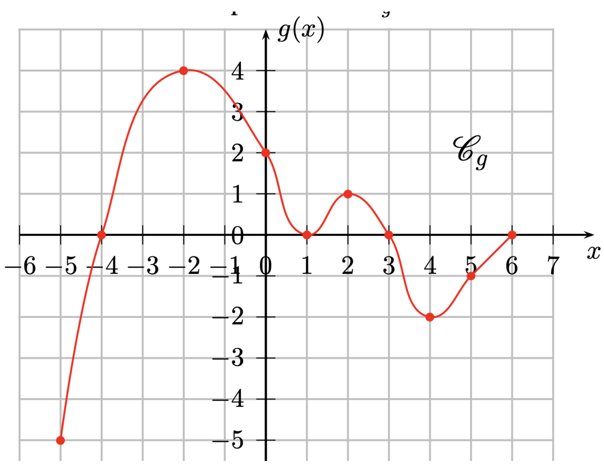
Nom :	DS 04	2nde 06 — Nov. 2023
Prénom :		Devoir n° 08 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso. Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 7 points

7 pts [Lectures graphiques] On considère la fonction g dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-dessous.



Pour cet exercice, on ne demande aucune justification ! Fait assez rare pour être souligné...

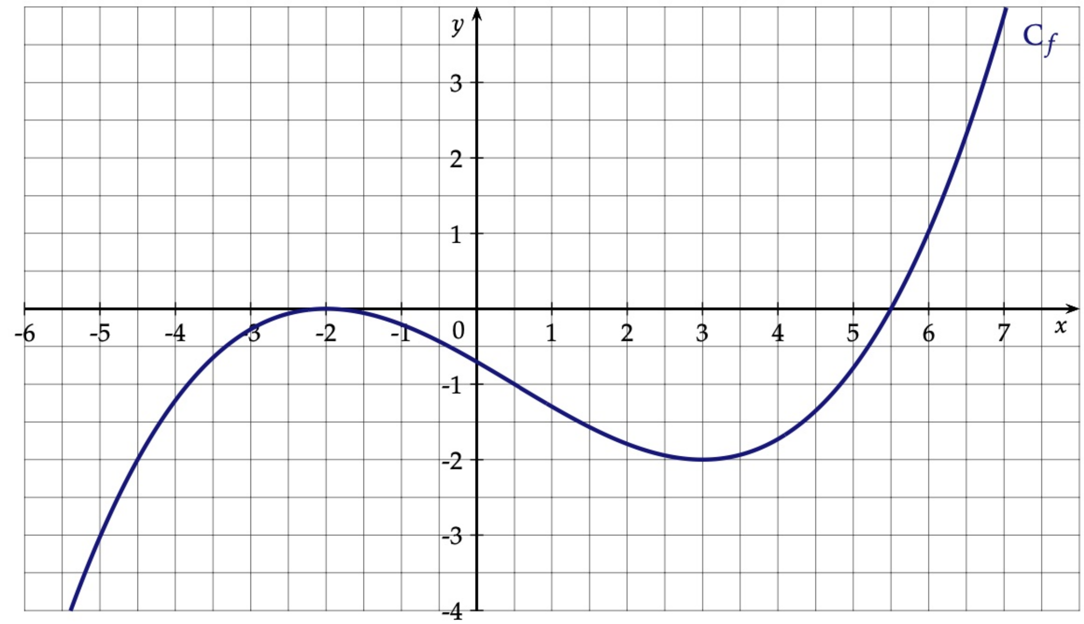
A compléter sur cette feuille

1. Lire l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g : $\mathscr{D}_g = \boxed{\text{[-5 ; 6]}}$
2. Donner l'images par la fonction g de 4 : $\boxed{\text{g(4)=-2}}$
3. Donner le ou les antécédent(s) par g de 4 : $\boxed{-2}$
4. Donner les antécédents par g de 0 : $\boxed{-4\ ;\ 1\ ;\ 3\ ;\ 6}$
5. Déterminer l'ensemble des réels qui ont une image positive ou nulle par la fonction g. On note E cet ensemble : $\boxed{E = [-4\ ;\ 3] \cup \{6\{}$
6. Quels sont les maximum et minimum de g sur son ensemble de définition ? Pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ? : $\boxed{\text{max 4 atteint pour } x = -2 \text{ et min } -5 \text{ atteint pour } x = -5}$
7. Résoudre par lecture graphique l'équation $g(x) = 2$: $\boxed{-3,5 \ \text{ et } \ 0}$

Exercice 2 — 4,5 points

4.5 pts

La courbe C_f tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

1 Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet deux solutions : } x_1 = -2 \text{ et } x_2 = 5,5.}$$

2 Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.
Le signe de f suivant les valeurs de x se déduit des positions relatives de la courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		5.5		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

3 Établir le tableau des variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Exercice 3 — **3 points**

1 pt **1** Donner sans justification l'ensemble de définition de la fonction définie par $(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x - 5}$

Corrigé

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

2 pts **2** Déterminer les antécédents de 0 par f .

Corrigé

On sait que les antécédents de 0 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \quad &\iff \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 1}{x - 5} = 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{4} \\ x \neq 5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } x = -\dfrac{1}{2} \\ x \neq 5 \end{cases}\end{aligned}$$

Les antécédents de 0 par f. sont :

$$\boxed{\left\{\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right\}}$$

Exercice 4 — 10,5 points

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + x + 10 \text{ et } g(x) = 5 - 2x$$

1 pt **1** Calculer à la main l'image de -3 par f .

$$\begin{aligned} f(-3) &= -2 \times (-3)^2 - 3 + 10 \\ &= -2 \times 9 + 7 \\ &= -11 \end{aligned}$$

l'image de -3 par f est -11.

2 pts **2** A l'aide de la calculatrice, compléter les tableau de valeurs suivant :

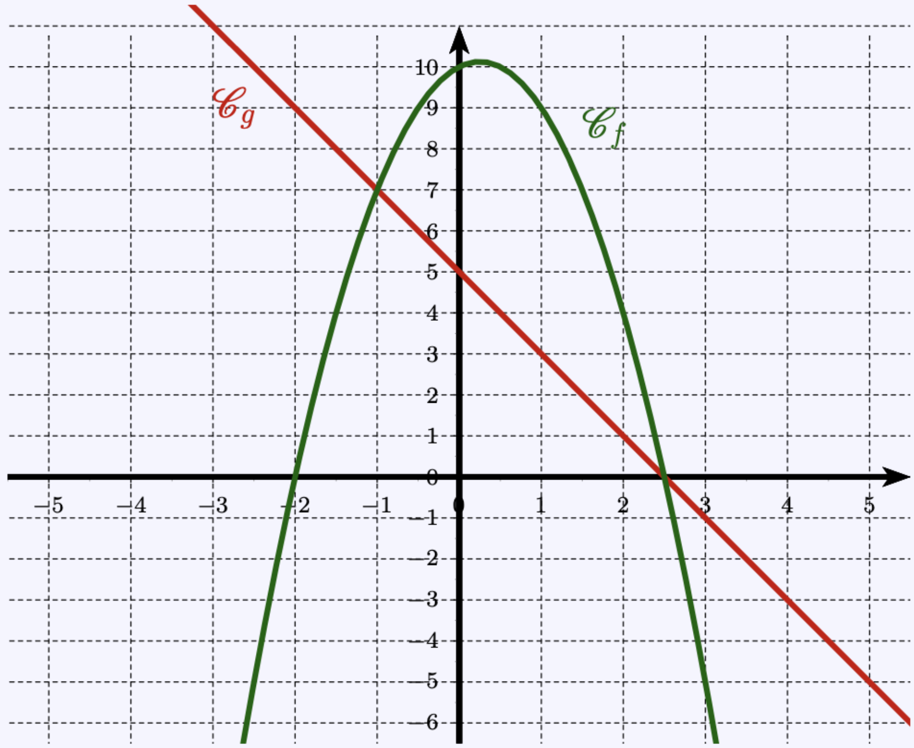
Corrigé

A compléter sur cette feuille

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f(x)$	-11	0	7	9	10	10	9	4	-5

2 pts **3** On a tracé $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction affine g dans le repère ci-dessous.
Construire $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

A compléter sur cette feuille



4 Intersection des deux courbes représentatives.

1 pt **a.** Donner par lecture graphique les coordonnées des points d'intersection des deux courbes .

Corrigé

$\boxed{A(-1\,;\,7) \text{ et } B(2,5\,;\,0)}$

1 pt **b.** Montrer que pour tout réel x : $f(x) = (5-2x)(2+x)$

Pour tout réel x de $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\boxed{(5-2x)(2+x)} &= 10 + 5x - 4x^2 - 2x^2 \\ &= -2x^2 + x + 10 \\ &= \boxed{f(x)}\end{aligned}$$

On a donc bien démontré que pour tout réel x de $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{f(x) = (5-2x)(2+x)}$$

2 pts **c.** Retrouver alors les coordonnées des points d'intersection par le calcul (en résolvant une équation).

Corrigé

Les abscisses des points d'intersection des deux courbes sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\iff (5-2x)(2+x) = (5-2x) \\
&\iff (5-2x)(2+x) - (5-2x) = 0 \\
&\iff \boxed{(5-2x)(2+x)} - \boxed{(5-2x)\times 1} = 0 \\
&\iff (5-2x)\Big[(2+x) - 1\Big] = 0 \\
&\iff (5-2x)(1+x) = 0 \\
&\iff \Big(5-2x=0\Big) \text{ ou } \Big(1+x=0\Big) = 0 \\
&\iff \left(x = \frac{5}{2}\right) \text{ ou } \Big(x=-1\Big) = 0
\end{aligned}$$

On cherche maintenant les ordonnées :

$$g\left(\frac{5}{2}\right) = 5 - 2\times\frac{5}{2} = 5-5 = 0 \text{ donc on retrouve } \underline{B(2,5\ ;\ 0)}$$

et

$$g\,(-1) = 5 - 2\times(-1) = 5+2 = 7 \text{ donc on retrouve } \underline{A(-1\ ;\ 7)}$$

1.5 pt **5** Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Corrigé

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff (5-2x)(2+x) = 0 \\
&\iff \Big(5-2x=0\Big) \text{ ou } \Big(2+x=0\Big) = 0 \\
&\iff \boxed{\left(x=\frac{5}{2}\right) \text{ ou } \Big(x=-2\Big)}
\end{aligned}$$