Nom :	DS 01	TMEX OISELET — Oct. 2023
Prénom :		Devoir n° 02 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 3 points

3 pts Compléter

1. Si $z=-2+4\mathrm{i}$ alors $\bar{z}=-2-4\mathrm{i}$
2. Si $z=2+\mathrm{i}$ alors $z^3=(2+\mathrm{i})^2(2+\mathrm{i})=(4+2\times 2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)(2+\mathrm{i})=(2+\mathrm{i})\times(3+4\mathrm{i})=6+8\mathrm{i}+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=2+11\mathrm{i}$

$$\boxed{\text{Si } z=2+\mathrm{i} \text{ alors } z^3=2+11\mathrm{i}}$$

3. Si $z=x+\mathrm{i}y$ alors $z\bar{z}=x^2+y^2$

Exercice 2 — 3 points

3 pts

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :(détailler les calculs !)

$$(1+i)^2,\quad \frac{1-i}{1+i},\quad \frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}.$$

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1^2+2\times1\times i+i^2\\ &=1+2i-1\\ &=2i\end{aligned}$$

$$\boxed{(1+i)^2=2i}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\ &=\frac{-2i}{1^2+1^2}\\ &=-i\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1-i}{1+i}=-i}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i} &= \frac{1-i-1-i}{(1+i)(1-i)}\\ &=\frac{-2i}{1^2+1^2}\\ &=-i\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}=-i}$$

Exercice 3 — 3 points

3 pts Soit $z\in\mathbb{C}$. On pose $z=x+iy$ où x et y désignent des nombres réels.
On donne $f(z)=z^2-2z+\mathrm{i}$.

Calculer $Re(f(z))$ et $Im(f(z))$ en fonction de x et y.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 - 2z + \mathrm{i} \\ &= (x+\mathrm{i}y)^2 - 2(x+\mathrm{i}y) + \mathrm{i} \\ &= x^2 + 2x \times \mathrm{i}y + (\mathrm{i}y)^2 - 2x - 2iy + \mathrm{i} \\ &= x^2 + \mathrm{i}2xy - y^2 - \mathrm{i} \times 2y - 2x + \mathrm{i} \\ &= x^2 - y^2 - 2x + \mathrm{i}(2xy - 2y + 1) \\ &= Re(f(z)) + \mathrm{i}Im(f(z)) \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, il vient :

$$\boxed{Re(f(z)) = x^2 - y^2 + 2x \text{ et } Im(f(z)) = 2xy - 2y + 1}$$

Exercice 4 — 4 points

4 pts

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $(1+\mathrm{i})z = 2\mathrm{i}z + 1$

$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})z = 2\mathrm{i}z + 1 &\iff (1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}z = 1 \\ &\iff (1+\mathrm{i}-2\mathrm{i}) = 1 \\ &\iff z = \frac{1}{1-\mathrm{i}} \\ &\iff z = \frac{(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} \\ &\iff z = \frac{1+\mathrm{i}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right\}}$$

(E_2) : $2\mathrm{i}z + 3\bar{z} = -4 - \mathrm{i}$;

On pose $z = x + iy$

$2iz + 3\bar{z} = -4 - \mathrm{i} \iff 2i(x+iy) + 3(x-iy) = -4 - i$

$2ix - 2y + 3x - 3iy = -4 - i$

$3x - 2y + i(2x - 3y) = -4 - i$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire il vient :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x = -10 \\ 5y = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2-\mathrm{i}\}}$$

Exercice 5 — 3 points

3 pts Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + 25 = 0; \qquad z^2 + 4z + 32 = 0$$

$$\begin{aligned} z^2 + 25 = 0 &\iff z^2 - 25i^2 = 0 \\ &\iff z^2 - (5\mathrm{i})^2 = 0 \\ &\iff (z - 5\mathrm{i})(z + 5\mathrm{i}) = 0 \\ &\iff z = 5\mathrm{i} \text{ ou } z = -5\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{5\mathrm{i}; -5\mathrm{i}\}}$$

Résolution de $z^2 + 4z + 32 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 128 = -112 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{7}\right)^2$. Comme $\Delta < 0$, l'équation a deux racines complexes conjuguées

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} & z_2 &= \overline{z_1} \\ &= \frac{-4 + 2\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} & &= -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{7} \\ &= -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2+2i\sqrt{7}; -2-2i\sqrt{7}\}}$$

Exercice 6 — 5 points

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante :

$$z^3 + 4z^2 + 9z + 10 = 0$$

1 pt **1** Montrer que -2 est solution de l'équation.

Posons $P(z) = z^3 + 4z^2 + 9z + 10$

$P(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + 9(-2) + 10 = -8 + 16 - 18 + 10 = 0$

$$\boxed{P(-2) = 0 \text{ donc } -2 \text{ est bien une solution de l'équation.}}$$

2 pts **2** Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$z^3 + 4z^2 + 9z + 10 = (z+2)(az^2 + bz + c)$$

$$z^3 + 7z^2 + 17z + 15 = (z+3)(az^2 + bz + c)$$

Comme -2 est une racine de P ; le polynôme $P(z)$ se factorise par $(z+2)$,
ainsi il existe un polynôme $Q(z) = az^2 + bz + c$ tel que $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z+2)(az^2 + bz + c) \\
&= az^3 + bz^2 + cz + 2az^2 + 2bz + 2c \\
&= az^3 + (b+2a)z^2 + (c+2b)z + 2c \\
\text{Or } P(z) &= z^3 + 4z^2 + 9z + 10
\end{aligned}$$

En identifiant les termes de même degré, il vient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 4 \\ c + 2b = 9 \\ 2c = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 - 2a = 4 - 2 = 4 \\ c = 9 - 2b = 5 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } P(z) = (z+2)(z^2 + 2z + 5)}$$

2 pts **3** Résoudre alors cette équation.

$$\begin{aligned}
z^3 + 4z^2 + 9z + 10 = 0 &\iff z + 2 = 0 \text{ ou } (z^2 + 2z + 5) = 0 \\
&\iff z = -3 \text{ ou } (z^2 + 4z + 5) = 0
\end{aligned}$$

Résolution de $z^2 + 2z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16$. Comme $\Delta < 0$, l'équation a deux racines complexes conjuguées

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} & z_2 &= \overline{z_1} \\
&= \frac{-2 + 4i}{2} & &= -1 - 2i \\
&= -1 + 2i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2; -1+2i; -1-2i\}}$$

Exercice 7 — 3 points

3 pts On note $j=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

1 Calculer sous forme algébrique j^2; j^3.

$$\begin{aligned}
j^2 &= \left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+i^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\bar{j}\\
j^3 &= j\times j^2\\
&= j\bar{j}\\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1
\end{aligned}$$

$$\boxed{j^2=\bar{j}=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ et }j^3=1}$$

2 En déduire pour tout entier naturel n : j^{3n}, j^{3n+1}, j^{3n+2}.

- $j^{3n}=\left(j^3\right)^n=1^n=1$
- En multipliant par j : $j^{3n}\times=j$ donc $j^{3n+1}=j$
- En multipliant à nouveau par j : $j\times j^{3n+1}=j^2$ donc $j^{3n+2}=j^2$

$$\boxed{j^{3n}=1, j^{3n+1}=j\text{ et}j^{3n+2}=j^2}$$

3 Calculer la somme :

$$S=1+j+j^2+j3+j^4+\cdots+j^{2025}$$

On reconnaît ici la somme de 2026 termes de la suite géométrique de premier terme 1 de raison j.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1-\text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1-\text{raison}}\times\text{Premier terme}\\
&= \frac{1-j^{2026}}{1-j}\times 1\\
&= \frac{1-j^{2026}}{1-j}
\end{aligned}$$

$2026=3\times 675+1$ donc $j^{2026}=\left(j^3\right)^{275}\times j=j$

Ainsi $S==\frac{1-j}{1-j}=1$

$$\boxed{S=1+j+j^2+j3+j^4+\cdots+j^{2025}=1}$$