Nom :	DS 02	TMEX OISELET Nov. 2023
Prénom :		Devoir n° 02 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 2CM — 7,5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions,quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page qui sera ramassé 30 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1.5 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1.5 pt **1** Soient $A(5-2i)$ et $B(-6-3i)$ et $C(-z_A)$. L'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z-5+2i| = |z+6+3i|$ est :

a. La médiatrice de [CB]. **b.** Le cercle de diamètre [CB].

c. La médiatrice de [AB]. **d.** Le cercle de diamètre [AB].

$$\begin{aligned} |z-5+2i| = |z+6+3i| &\iff |z-(5-2i)| = |z-(-6-3i)| \\ &\iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \\ &\iff AM = BM \\ &\iff M \text{est équidistant de } A \text{ et } B\,. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice de [AB].

La bonne réponse est **c.**

1.5 pt **2** Soit $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Lequel de ces complexes z n'appartient pas à U ?

a. $z_1 = i$ **b.** $z_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{5}\right)$ **c.** $z_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$ **d.** $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$$\begin{aligned} |z_2| &= \left|\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{5}\right)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\left(\sqrt{2} - i\sqrt{5}\right)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{5}^2} \\ &= \tfrac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

La bonne réponse est **b.**

1.5 pt **3** Soit $C(-z_A)$ et $ABCD$ un parallélogramme. L'affixe de D, z_Dest :

a. $z_D = -z_B$ **b.** $z_D = -\overline{z_B}$ **c.** $z_D = \overline{z_B}$ **d.** Aucune des trois propositions

$$\begin{aligned} ABCD \text{ un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\iff z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \\ &\iff z_B - z_A = z_C - z_D \\ &\iff z_D = -z_B + z_A + z_C \\ &\iff z_D = -z_B + z_A - z_A \text{ car } z_C = -z_A \\ &\iff z_D = -z_B \end{aligned}$$

La bonne réponse est **a.**

1.5 pt **4** Soient $A(-4-i)$ et $B(8+5i)$. L'affixe de I notée z_I milieu de $[AB]$ est :

a. $z_I = 2+2i$ **b.** $z_I = 6+3i$ **c.** $z_I = 2+3i$ **d.** $z_I = 2-3i$

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{1}{2}(z_A + z_B) \\ &= \frac{1}{2}(-4-i+8+5i) \\ &= \frac{1}{2}(4+4i) \\ &= 2+2i \end{aligned}$$

La bonne réponse est **a.**

1.5 pt **5** Soient $A(4+i)$ et $B(6+5i)$ alors $AB =$:

a. $2\sqrt{5}$ **b.** $2\sqrt{10}$ **c.** $2\sqrt{7}$ **d.** $\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} AB &= |z_B - z_A| \\ z_B - z_A &= 6+5i-(4+i) \\ &= 2+4i \\ AB &= \sqrt{2^2+4^2} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

La bonne réponse est **a.**

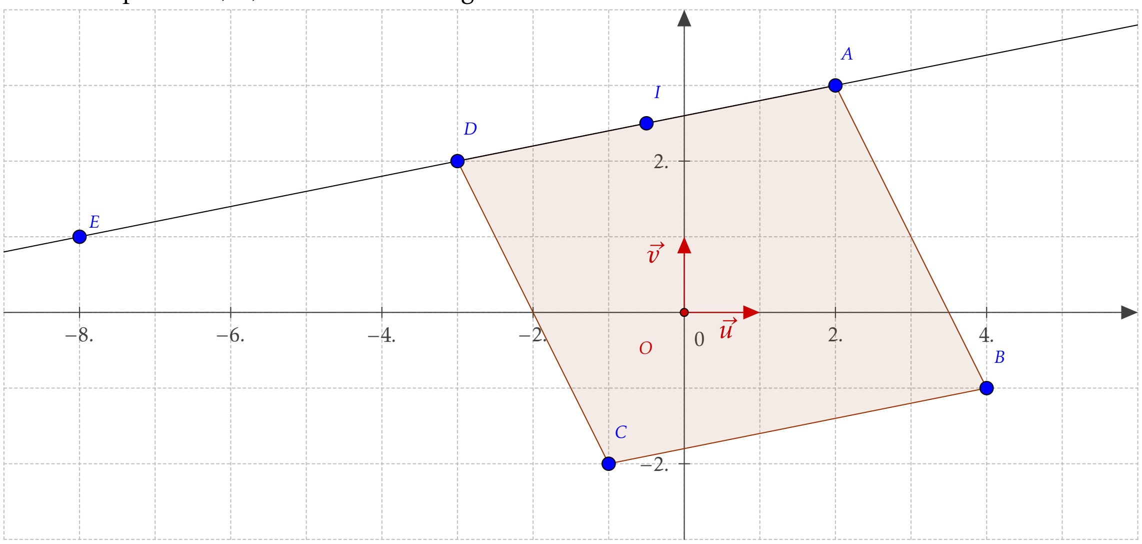
	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse	c	b	a	a	a

Exercice 2 **0 point**

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$a = 2+3\mathrm{i}, \quad b = 4-\mathrm{i}, \quad c = -1-2\mathrm{i}, \quad d = -3+2\mathrm{i}$$

1 Placer les points A, B, C et D sur une figure.



2 Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\begin{aligned}
ABCD \text{ est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\\
&\iff z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}\\
\text{Or } z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A = b-a\\
&= 4-\mathrm{i}-2-3\mathrm{i}\\
&= 2-4\mathrm{i}\\
\text{Et } z_{\overrightarrow{DC}} &= z_C - z_D = c-d\\
&= -1-2\mathrm{i}+3-2\mathrm{i}\\
&= 2-4\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Ayant $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} = 2-4\mathrm{i}$; on a prouvé que $ABCD$ est un parallélogramme.

3 Calculer l'affixe du point I milieu de $[AD]$

$$\begin{aligned}
z_I &= \tfrac{z_A+z_D}{2}\\
&= \tfrac{1}{2}(a+d)\\
&= \tfrac{1}{2}(2+3\mathrm{i}-3+2\mathrm{i})\\
&= -\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

L'affixe du point I milieu de $[AD]$ est $z_I = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

4 Soit E le point d'affixe $e = -8+\mathrm{i}$. Les points A, I et E sont ils alignés ? Justifiez !

$$\begin{aligned}
\text{Les points } A, I \text{ et } E \text{ sont alignés} &\iff \overrightarrow{AI} \text{ et } \overrightarrow{AE} \text{ sont colinéaires}\\
\text{Or } z_{\overrightarrow{AI}} &= z_I - z_A\\
&= -\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2}\mathrm{i}-2-3\mathrm{i}\\
&= -\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\\
\text{Et } z_{\overrightarrow{AE}} &= z_E - z_A\\
&= -8+\mathrm{i}-2-3\mathrm{i}\\
&= -10-2\mathrm{i}\\
\text{On peut former } \frac{z_{\overrightarrow{AI}}}{z_{\overrightarrow{AE}}} &= \frac{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}}{-10-2\mathrm{i}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}(-5-\mathrm{i})}{2(-5-\mathrm{i})} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

On déduit donc que $\dfrac{z_{\overrightarrow{AI}}}{z_{\overrightarrow{AE}}} = \dfrac{1}{4}$, ce qui fournit la relation de colinéarité $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$, on a donc bien prouvé que les points A, I et E sont alignés.

5 Calculer AB

$$\begin{aligned} AB &= \mid z_B - z_A \mid \\ &= \mid b - a \mid \\ &= \mid 2 - 4\mathrm{i} \mid \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

.

Exercice 3 — 4 points

Représenter les ensembles suivants après avoir justifié :

2 pts $\mathscr{E}_1 = \{M(z) \mathbin{/} |z + 2 + i| = 4\}$

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E}_1 &\iff |z - (-2 - i)| = 4 \\ &\iff |z_M - z_C| = 4 \text{ où } C(-2 - i) \\ &\iff CM = 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{E}_1 \text{ est donc le cercle de centre } C \text{ de rayon 4.}}$$

2 pts $\mathscr{E}_2 = \{M(z) \mathbin{/} |z + 2 + i| = |z - 2i|\}$

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E}_3 &\iff |z - (-2 - i)| = |z - 2i| \\ &\iff |z_M - z_C| = |z_M - z_D| \text{ où } C(-2 - i) \text{ et } D(2i) \\ &\iff CM = DM \\ &\iff M \text{ est équidistant de } C \text{ et } D \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{E}_2 \text{ est donc la médiatrice de } [CD].}$$

Exercice 4 — 9 points

On définit pour tout nombre complexe $z \neq i$ le nombre

$$z' = \frac{z + 3}{z - i}$$

1 **Par le calcul :**

3 pts **a.** On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $z' = x' + iy'$ avec $x', y' \in \mathbb{R}$.
Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z + 3}{z - i} \\ &= \frac{x + iy + 3}{x + iy - i} \\ &= \frac{(x + 3) + iy}{x + i(y - 1)} \\ &= \frac{((x + 3) + iy)(x - i(y - 1))}{(x + i(y - 1))(x - i(y - 1))} \\ &= \frac{(x(x + 3) - i^2 y(y - 1) + i(xy - (x + 3)(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 3x + y^2 - y + i(xy - xy + x - 3y + 3}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 3x + y^2 - y}{x^2 + (y - 1)^2} + i\frac{x - 3y + 3}{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= x' + iy' \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, il vient $x' = \dfrac{x^2+3x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $y' = \dfrac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}$

2 pts **b.** Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' est réel. Donner la nature de l'ensemble $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\iff z' \text{est réel} \\ &\iff Im(z') = 0 \\ &\iff \frac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2} \\ &\iff x-3y+3=0 \text{ et } x^2+(y-1)^2 \neq 0 \\ &\iff x-3y+3=0 \text{ et } (x;y) \neq (0;1) \end{aligned}$$

On reconnaît ici l'équation cartésienne d'une droite

Par ailleurs le point $A(0;1)$ vérifie l'équation $x-3y+3=0$; en effet : $0-3\times1+3=3-3=0$

$\mathcal{D}$ est donc la droite d'équation $x-3y+3=0$ privé du point A d'affixe i.

2 pts **c.** Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' est imaginaire pur.
En déduire la nature et les caractéristiques de l'ensemble $\mathscr{E}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\iff z' \text{est imaginaire pur} \\ &\iff Re(z') = 0 \\ &\iff \frac{x^2+3x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} = 0 \\ &\iff x^2+3x+y^2-y=0 \text{ et } x^2+(y-1)^2 \neq 0 \\ &\iff \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \text{ et } (x;y) \neq (0;1) \\ &\iff \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{10}{4}\right) \text{ et } (x;y) \neq (0;1) \end{aligned}$$

On reconnaît ici l'équation cartésienne du cercle de centre Ω d'affixe $\omega = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$.
On rappelle que le cercle de centre $\Omega(x_0;y_0)$ de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Par ailleurs le point $A(0;1)$ vérifie l'équation $x^2+3x+y^2-y=0$; en effet : $0^2+3\times0+1^2-1=1-1=0$

$\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ privé du point A d'affixe i.

2 pts **2** **Géométriquement :** Soient A d'affixe i et B d'affixe -3.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$.
Déterminer $\mathcal{F}$ de manière géométrique.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\iff |z'| = 1 \\ &\iff \left|\frac{z-(-3)}{z-i}\right| = 1 \\ &\iff \left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right| = 1 \\ &\iff \frac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} = 1 \\ &\iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \\ &\iff AM = BM \\ &\iff M \text{ est équidistant de } A \text{ et } B \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est donc la médiatrice de $[AB]$.

Un figure :