Nom :	DS 04	TMEX OISELET	Janv. 2024
Prénom :		Devoir n° 08	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 : Calcul matriciel... — 12,5 points

12.5 pts On considère les matrices A, B, C et F telles que $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1
- **a.** Effectuer toutes les sommes possibles entre ces quatre matrices.
- **b.** Calculer $3C - 5F$.
- **c.** Calculer CA et BF en détaillant les calculs.
- **d.** Calculer avec la calculatrice F^{30}

2 Soit $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- **a.** Calculer D^2 en détaillant les calculs.
- **b.** En déduire D^{2024} et D^{2025}.

3 On considère la suite, dite Fibonacci, définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \geq 0$.
- **a.** Montrer que la matrice carrée F de la question 1. permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

- **b.** Montrer, par récurrence sur $n \geq 0$ que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$
- **c.** Al'aide de la question 1-d), montrer par un calcul que $u_{30} = 1\,346\,269$ et $u_{31} = 2\,178\,309$.

Exercice 2 — 9 points

9 pts

1 Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ où x et y sont des nombres réels.

2
- **a.** Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 3x + 2y = b \end{cases}$ en l'inconnue (x, y) où a, b, x, y sont des nombres réels.
- **b.** En déduire la matrice inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- **c.** Vérifier à l'aide de la calculatrice.

3 Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y = z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$
(La réponse est $\mathcal{S} = \{(-1; 1; 1)\}$)