Nom :	**DS 05**	TMEX OISELET — *Mars 2024*
Prénom :		*Devoir n° 08* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *4 points*

4 pts Quand on le divise par 4, le reste est 3, mais quand on le divise par 5, le reste est 1 et le quotient est inchangé. Quel est ce nombre ?
Soit n le nombre cherché.
On a simultanément :

$$\begin{cases} n = 4q+3 \\ n = 5q+1 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 4q+3 \\ 0 = q-2 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 11 \\ q = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Le nombre cherché est 11.}}$

Exercice 2 — *4 points*

4 pts Démontrer que la somme des carrés de quatre entiers consécutifs est paire.
Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2 &= n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4+n^2+6n+9 \\ &= 4n^2+12n+14 \\ &= 2\left(2n^2+6n+7\right) \end{aligned}$$

Or $2n^2+6n+7$ est entier , car n est entier.

$\boxed{\text{Donc la somme des carrés de quatre entiers consécutifs est paire.}}$

Exercice 3 — *4 points*

n désigne un nombre entier relatif.

2 pts **1** Démontrer que si un entier relatif a divise $3n-5$ et $2n+3$, alors a divise 19.

Soit a un diviseur commun à $3n-5$ et $2n+3$, alors $\begin{cases} a \mid 3n-5 \\ a \mid 2n+3 \end{cases}$
on déduit donc que a divise toute combinaison linéaire de $3n-5$ et $2n+3$:

Ainsi

$$a \mid -2(3n-5)+(3)(2n+3)$$

Soit

$$a \mid -6n+10+6n+9$$

On a donc bien

$$a \mid 19$$

$\boxed{\text{Donc si } a \text{ divise } 3n-5 \text{ et } 2n+3 \text{ alors } a \text{ divise 19.}}$

2 pts **2** La réciproque est-elle vraie ?

La réciproque est fausse !

Si a divise 19, alors $a \in \{-19;-1;1;19\}$.

On prend $a = 19$, avec $n = 3$, on a $3n - 5 = 4$, donc a ne divise pas $3n - 5$.

$$\boxed{\text{Si } a \text{ divise 19, on n'a pas nécessairement } a \text{ divise } 3n-5 \text{ et } 2n+3.}$$

Exercice 4

8 points

8 pts Démontrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, l'entier $N = n(n+2)(n-5)(n+5)$ est divisible par 4.
(on pourra procéder à une disjonction des cas ...).

$n \in \mathbb{N}$.

On pose la division de n par 4.

On a donc $n = 4k + r$ où $0 \leq r < 4$.

Les restes possibles sont 0 ;1 ;2 ;3 et 4.

Donc $n = 4k$ ou $n = 4k+1$ ou $n = 4k+2$ ou $n = 4k+3$.

- Premier cas : Si $n = 4k$ alors

$$\begin{aligned} N = &\ 4k(4k+2)(4k-5)(4k+5) \\ &= 4\underbrace{k(4k+2)(4k-5)(4k+5)}_{\in\mathbb{Z}} \text{ donc } N \text{ est divisible par 4} \end{aligned}$$

- Deuxième cas : Si $n = 4k+1$ alors

$$\begin{aligned} N = &\ (4k+1)(4k+3)(4k-4)(4k+6) \\ &= 4\underbrace{(4k+1)(4k+3)(k-1)(4k+6)}_{\in\mathbb{Z}} \text{ donc } N \text{ est divisible par 4} \end{aligned}$$

- Troisième cas : Si $n = 4k+2$ alors

$$\begin{aligned} N = &\ (4k+2)(4k+4)(4k-3)(4k+7) \\ &= 4\underbrace{(4k+2)(k+1)(4k-3)(4k+7)}_{\in\mathbb{Z}} \text{ donc } N \text{ est divisible par 4} \end{aligned}$$

- Quatrième cas : Si $n = 4k+3$ alors

$$\begin{aligned} N = &\ (4k+3)(4k+5)(4k-2)(4k+8) \\ &= 4\underbrace{(4k+3)(4k+5)(4k-2)(k+2)}_{\in\mathbb{Z}} \text{ donc } N \text{ est divisible par 4} \end{aligned}$$