Nom :	DS 06	TMEX OISELET Avril 2024
Prénom :		Devoir n° 06 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1 — 11,5 points

1 On donne $a \equiv 2\ [7]$ et $b \equiv 3\ [7]$.

3 pts **a.** Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de : $2a+3b$, de a^2+b^2 et de ab .

- Comme $a \equiv 2\ [7]$ et $b \equiv 3\ [7]$ on déduit d'après la compatibilité des congruences avec la multiplication $\begin{cases} 2a \equiv 4\ [7] \\ 3b \equiv 9\ [7] \end{cases}$ puis en ajoutant $2a+3b \equiv 13\ [7]$ or $13 \equiv 6\ [7]$ car $13 = 1\times 7+6$.
  Ainsi $2a+3b \equiv 5\ [7]$

  Si $a \equiv 2\ [7]$ et $b \equiv 3\ [7]$ alors le reste de la division euclidienne de $2a+3b$ par 7 est 6.

- De $\begin{cases} a \equiv 2\ [7] \\ b \equiv 3\ [7] \end{cases}$ on déduit $\begin{cases} a^2 \equiv 2^2\ [7] \\ b^2 \equiv 3^2\ [7] \end{cases}$ puis en ajoutant $a^2+b^2 \equiv 4+9\ [7]$
  Or $4+9=13$ et donc $a^2+b^2 \equiv 6\ [7]$

  Si $a \equiv 2\ [7]$ et $b \equiv 3\ [7]$ alors le reste de la division euclidienne de a^2+b^2 par 7 est 6.

- Comme $\begin{cases} a \equiv 2\ [7] \\ b \equiv 3\ [7] \end{cases}$ on déduit d'après la compatibilité des congruences avec la multiplication $ab \equiv 2\times 3\ [7]$.
  Or $2\times 3 = 6$ et donc $ab \equiv 6\ [7]$

  Si $a \equiv 2\ [7]$ et $b \equiv 3\ [7]$ alors le reste de la division euclidienne de ab par 7 est 6.

1 pt **b.** Montrer que a^4-b^2 est divisible par 7.
On a $\begin{cases} a^2 \equiv 4\ [7] & \text{donc } a^4 \equiv 4^2\ [7] \\ & \text{on a aussi } b^2 \equiv 3^2\ [7] \end{cases}$ donc $a^4-b^2 \equiv 16-9\ [7]$ soit $a^4-b^2 \equiv 7\ [7]$ ou encore $a^4-b^2 \equiv 0\ [7]$
$a^4-b^2 \equiv 0\ [7]$ permet daffirmer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a^4-b^2 = 7k$.

Si $a \equiv 2\ [7]$ et $b \equiv 3\ [7]$ alors a^4-b^2 est divisible par 7.

2 pts **2** Déterminer les entiers x tels que $2x \equiv 2\ [8]$.

On dresse un tableau de congruences modulo 8.

$x \equiv \cdots\ [6]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$2x \equiv \cdots\ [6]$	0	2	4	6	0	2	4	6

$\mathcal{S} = \{1+8k ; 4+8k \setminus k \in \mathbb{Z}\}$

3 pts **3** **a.** Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 17.

- On a $2^4 = 16$, donc $2^4 \equiv -1\ [17]$, donc en élevant au carré (compatibilité des congruences avec les puissances) $\left(2^4\right)^2 \equiv (-1)^2\ [17]$.
  Ainsi $2^8 \equiv 1\ [17]$.
- Posons alors la division euclidienne de 2023 par 8 :
  $2023 = 253\times 8+7$.

Comme$2^8 \equiv 1\ [17]$, donc en élevant à la puissance 253 (compatibilité des congruences avec les puissances) $\left(2^8\right)^{253} \equiv (1)^{253}\ [17]$.
Ainsi $2^{8\times 252} \equiv 1\ [17]$.
Enfin en multipliant par 2^7 , on obtient : $2^{8\times 253} \times 2^7 \equiv 2^7\ [17]$.

Donc $2^{8\times 253+7} \equiv -8\ [17]$ ou encore $2^{2023} \equiv 9\ [17]$.
On peut donc écrire $2^{2023} = 17k + 9$.

Le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 17 est 9.

2.5 pts **b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.
Posons $A_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

$$\begin{aligned} A_n &= 2^{n+2} + 3^{2n+1} \\ &= 2^n \times 2^2 + 3^{2n} \times 3 \\ &= 4 \times 2^n + 3 \times \left(3^2\right)^n \\ &= 4 \times 2^n + 3 \times 9^n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} 9 \equiv 2\ [7] \text{ donc} & 9^n \equiv 2^n\ [7] \\ \text{puis en multipliant par 3 :} & 3 \times 9^n \equiv 3 \times 2^n\ [7] \\ \text{On ajoute alors } 4 \times 2^n & 4 \times 2^n + 3 \times 9^n \equiv 4 \times 2^n + 3 \times 2^n\ [7] \\ \text{Ainsi} & A_n \equiv 7 \times 2^n\ [7] \\ \text{Ainsi} & A_n \equiv 0\ [7] \end{array}$$

Ayant $A_n \equiv 0\ [7]$, on déduit que pour tout entier naturel n, $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 2 — 3 points

3 pts n désigne un nombre entier naturel.
Montrer que, si n n'est pas divisible par 5, alors $(n^2-1)(n^2-4)$ est divisible par 5.
On dresse un tableau de congruence modulo 5.

$n \equiv \cdots\ [5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv \cdots\ [5]$	0	1	4	4	1
$n^2-1 \equiv \cdots\ [5]$	4	0	3	3	0
$n^2-4 \equiv \cdots\ [5]$	1	2	0	0	2
$(n^2-1)(n^2-4) \equiv \cdots\ [5]$	4	0	0	0	0

Avec ce tableau, on déduit que si n n'est pas congru à 0 modulo 5, alors $(n^2-1)(n^2-4)$ est congru à 0 modulo 5. Dit autrement :

si n n'est pas divisible par 5, alors $(n^2-1)(n^2-4)$ est divisible par 5.

Exercice 3 — 5 points

1 pt **1** Recopier et compléter ce tableau de congruence modulo 6.

$x \equiv \cdots [6]$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \cdots [6]$	0	1	4	3	4	1

2.5 pts **2** Prouver que l'équation $x^2 - 6y^2 = 2024$, d'inconnues x et y entiers relatifs, n'a pas de solution.
Soit $(x;y)$ un couple d'entiers solutions de l'équation $x^2 - 6y^2 = 2024$.
Alors comme $6 \equiv 0\ [6]$, on a $-6y^2 \equiv 0\ [6]$.

On a donc $\begin{cases} x^2 \equiv x^2\,[6] \\ -6y^2 \equiv 0\,[6] \end{cases}$ par somme $x^2 - 6y^2 \equiv x^2\,[6]$.
Par ailleurs $2024 = 6 \times 337 + 2$ donc $2024 \equiv 2\,[6]$ Donc si $(x;y)$ est un couple solution alors $x^2 \equiv 2\,[6]$.
Mais d'après le tableau de la question 1) on a $x^2 \not\equiv 2\,[6]$.

$$\boxed{\text{Donc l'équation } x^2 - 6y^2 = 2024\text{, d'inconnues } x \text{ et } y \text{ entiers relatifs, n'a pas de solution.}}$$

1.5 pt **3** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(x+3)^2 \equiv 1\,[6]$
$(x+3)^2 \equiv 1(6) \iff x+3 \equiv 1(6)$ ou $x+3 \equiv 5(6) \iff x \equiv -2(6)$ ou $x \equiv 2(6)$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4+6k; 2+6k \setminus k \in \mathbb{Z}\}}$$

Exercice 4 — *4 points*

4 pts n désigne un nombre entier naturel non nul. On pose alors $A_n = 2^{7n} - 28^n$.

1 Calculer A_1, A_2 et A_3.
On a $A_1 = 2^7 - 28^1 = 100, A_2 = 2^{14} - 28^2 = 15600$ et $A_3 = 2^{21} - 28^3 = 2075200$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Que peut-on conjecturer concernant les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de A_n.
On peut conjecturer que l'écriture décimale de A_n se termine par 00

3 Démontrer la conjecture précédente.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.$2^7 = 128$ et $128 = 100 + 28$ donc $2^7 \equiv 28\,[100]$
Par compatibilité avec les puissances, on obtient $\left(2^7\right)^n \equiv 28^n\,[100]$
soit $2^{7n} \equiv 28^n\,[100]$ puis $2^{7n} - 28^n \equiv 0\,[100]$
Ainsi, 100 divise A_n donc l'écriture décimale de A_n se termine par 00.

Exercice 5 Bonus ! — *4 points*

4 pts Déterminer, en fonction de n, le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier : $U_n = \sum_{k=0}^{n} 7^k$

On raisonne modulo 10.

- $7 \equiv 7\,[10]$
- $7^2 \equiv 9\,[10]$
- $7^3 \equiv 3\,[10]$
- $7^4 \equiv 1\,[10]$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
On pose la division de k par 4. Il existe donc un entier q tel que $k = 4q + r$ où $0 \leq r < 4$.
Comme $7^4 \equiv 1\,[10]$, on déduit $7^{4q} \equiv 1\,[10]$ puis $7^{4q+r} \equiv 7^r\,[10]$.
Ainsi, le reste de 7^k modulo 10 est le même que le reste de 7^r modulo 10.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par disjonction des cas modulo 4.

✍ Si n est divisible par 4 alors il existe un entier d tel que $n = 4d$ donc

$$U_n = \left(7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3\right) + \left(7^4 + 7^5 + 7^6 + 7^7\right) + \cdots + \left(7^{4d-4} + 7^{4d-3} + 7^{4d-2} + 7^{4d-1}\right) + 7^{4d}$$

On en déduit
$$U_n \equiv (1+7+9+3) + (1+7+9+3) + \cdots + (1+7+9+3) + 1\,[10]$$

Soit
$$U_n \equiv 20d + 1\,[10]$$
$$U_n \equiv 1\,[10]$$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est divisible par 4, le chiffre des unités de } U_n \text{ est 1.}}$$

✍ Si n est congru à 1 modulo 4 alors il existe un entier d tel que $n = 4d + 1$ donc

$$U_n = U_{4d+1} = U_{4d} + 7^{4d+1} \equiv 1 + 7[10] \equiv 8\ [10].$$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est congru à 1 modulo 4 4, le chiffre des unités de } U_n \text{ est 8.}}$$

✍ Si n est congru à 2 modulo 4 alors il existe un entier d tel que $n = 4d + 2$ donc

$$U_n = U_{4d+2} = U_{4d} + 7^{4d+1} + 7^{4d+2} \equiv 1 + 7 + 9[10] \equiv 7\ [10].$$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est congru à 2modulo 4 , le chiffre des unités de } U_n \text{ est 7.}}$$

✍ Si n est congru à 3 modulo 4 alors il existe un entier d tel que $n = 4d + 3$ donc

$$U_n = U_{4d+3} = U_{4d} + 7^{4d+1} + 7^{4d+2} + 7^{4d+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10] \equiv 0\ [10].$$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est congru à 3 modulo 4 , le chiffre des unités de } U_n \text{ est 0.}}$$