

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
 Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

 **Exercice 1** *11.5 points*

1 On donne $a \equiv 2 [7]$ et $b \equiv 3 [7]$.

- 3 pts **a.** Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de : $2a + 3b$, de $a^2 + b^2$ et de ab .
 1 pt **b.** Montrer que $a^4 - b^2$ est divisible par 7.

2 pts **2** Déterminer les entiers x tels que $2x \equiv 2 [8]$.

- 3 pts **3** **a.** Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 17.
 2.5 pts **b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

 **Exercice 2** *3 points*

3 pts n désigne un nombre entier naturel. Montrer que, si n n'est pas divisible par 5, alors $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ est divisible par 5. On dressera un tableau de congruences.

 **Exercice 3** *5 points*

1 pt **1** Recopier et compléter ce tableau de congruence modulo 6.

$x \equiv \dots [4]$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \dots [4]$						

2.5 pts **2** Prouver que l'équation $x^2 - 6y^2 = 2024$, d'inconnues x et y entiers relatifs, n'a pas de solution.

1.5 pt **3** Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $(x + 3)^2 \equiv 1 [6]$

 **Exercice 4** *4 points*

4 pts n désigne un nombre entier naturel non nul. On pose alors $A_n = 2^{7n} - 28^n$.

- 1** Calculer A_1, A_2 et A_3 .
2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on conjecturer concernant les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de A_n .
3 Démontrer la conjecture précédente.

 **Exercice 5 Bonus!** *4 points*

4 pts Déterminer, en fonction de n , le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier : $U_n = \sum_{k=0}^n 7^k$