

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

 **Exercice 1** 4 points

On donne la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1 pt 1 Justifier que A est inversible.
- 3 pts 2 Calculer A^{-1} .

 **Exercice 2** 7 points

On donne $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- 1 pt 1 Calculer QP . Que peut-on déduire ?
- 2 pts 2 Montrer que $A = PDQ$.
- 4 pts 3 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nQ$.

 **Exercice 3** 4 points

On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 5x - y = -\frac{17}{2} \\ -2x + 3y = 10 \end{cases}$$

- 1 pt 1 En posant $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B une matrice 2×1 à déterminer, montrer soigneusement que le système (S) est équivalent à l'égalité $AX = B$.
- 1 pt 2 Calculer A^{-1} à l'aide de la calculatrice.
- 1 pt 3 Montrer que $X = A^{-1}B$.
- 1 pt 4 En déduire la résolution de (S).

 **Exercice 4 Bonus** 2 points

- 2 pts Soit X et Y deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que si $XY = 0$ (la matrice nulle), alors les matrices X et Y ne sont pas inversibles.